

①

- 1) claim 1 $x=0$ donc $z=n \sim N(0, \sigma^2)$
claim 2 $x=1$ donc $z=1+n \sim N(1, \sigma^2)$

Règle de Bayes

$$d^*(z) = w_1 \Leftrightarrow P(w_2 | z) \geq P(w_1 | z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(z | w_1) P(w_1)}{P(z)} \geq \frac{P(z | w_2) P(w_2)}{P(z)}$$

Comme $P(w_1) = P(w_2)$, on a

$$d^*(z) = w_1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$d^*(z) = w_1 \Leftrightarrow z^2 \leq (z-1)^2 \Leftrightarrow \boxed{z \leq \frac{1}{2}}$$

Probabilité d'erreur

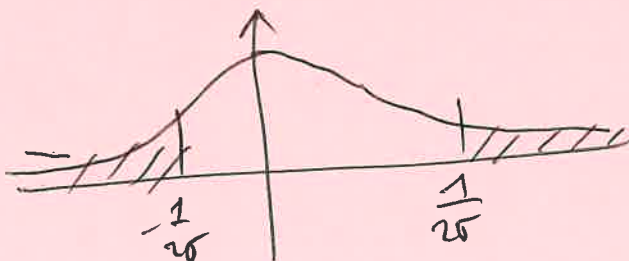
$$\begin{aligned} P_e &= P[d^*(z) = w_2 \text{ et } z \in w_2] + P[d^*(z) = w_2 \text{ et } z \in w_1] \\ &= P\left[z \leq \frac{1}{2} \mid z \in w_2\right] P(w_2) + P\left[z > \frac{1}{2} \mid z \in w_1\right] P(w_1) \\ &= \frac{1}{2} P\left[z \leq \frac{1}{2} \mid z \sim N(1, \sigma^2)\right] + \frac{1}{2} P\left[z > \frac{1}{2} \mid z \sim N(0, \sigma^2)\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} P\left[\frac{z-1}{\sigma} \leq \frac{-1}{2\sigma} \mid v \sim N(0,1)\right]$$

$$+ \frac{1}{2} P\left[\frac{z-0}{\sigma} > \frac{1}{2\sigma} \mid v \sim N(0,1)\right]$$

$$\text{donc } P_e = \frac{1}{2} F\left(-\frac{1}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} F\left(-\frac{1}{2\sigma}\right)$$

$$\text{donc } \boxed{P_e = F\left(-\frac{1}{2\sigma}\right)}$$



On remarque que $-\frac{1}{2\sigma} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0^+} -\infty$ donc $P_0 = F(-\frac{1}{2\sigma}) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$ (2)

quand il n'y a pas de bruit, on reconnaît sans erreur les deux symboles $x=0$ et $x=1$

2) d'après 1), on a

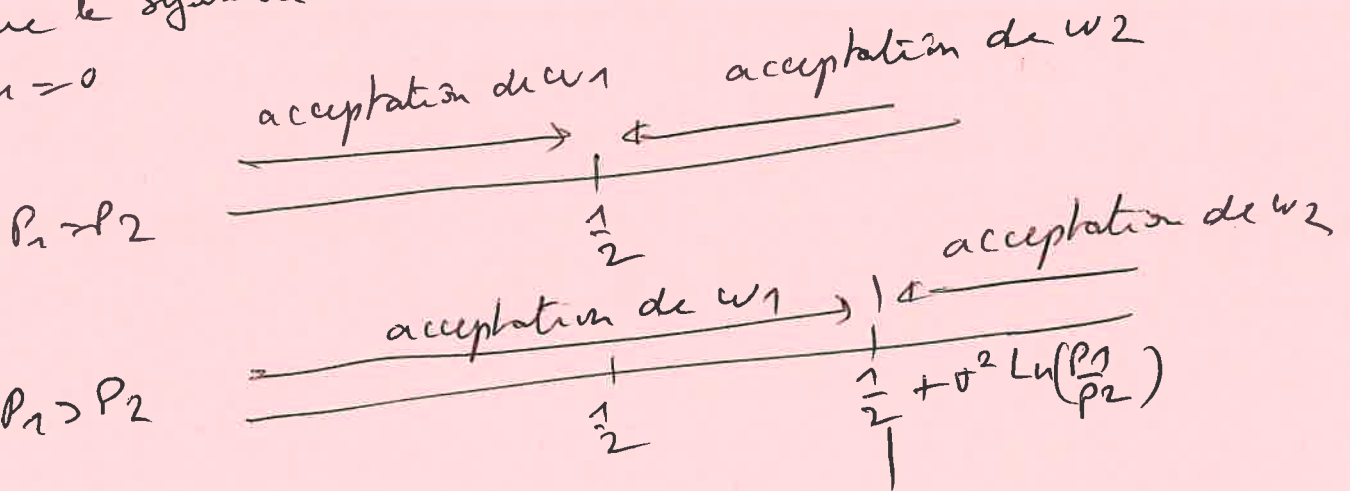
$$d^*(z) = w_1 \Leftrightarrow P_1 \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \geq P_2 \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln P_1 - \frac{z^2}{\sigma^2} \geq \ln P_2 - \frac{1}{2\sigma^2}(z^2 - 2z + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \geq z - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z \leq \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}$$

lorsque $P_1 > P_2$ le symbole $x=0$ est plus probable que le symbole $x=1$ donc on accepte plus souvent $x=0$



3) $d^*(z_1, \dots, z_N) = w_1 \Leftrightarrow P(z_1, \dots, z_N | w_1) \geq P(z_1, \dots, z_N | w_2)$

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right) \geq \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z_i-1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N z_i^2 \geq -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (z_i-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (-2z_i + 1) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (z_i - \frac{1}{2})$$

$$\text{Soit } d^*(z_1, \dots, z_N) = w, \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N z_i - \frac{N}{2} \leq 0$$

(3)

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \leq \frac{1}{2} \right|$$

pour $N=1$, on retrouve bien la règle précédente