Partiel de Classification et Reconnaissance des Formes

Lundi 25 janvier 2010, 8h00-10h00

Partiel avec documents autorisés

Barème indicatif : partie 1) : 8 points, partie 2) : 3 points, partie 3) : 4 points, partie 4) : 5 points

On considère un vecteur $\mathbf{X}(n)$ défini par

$$\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), ..., x(n-M+1)]^T$$

avec

$$\begin{aligned} x(n) &= \widehat{x}(n) + e(n) \\ \widehat{x}(n) &= \sum_{p=1}^{P} c_p \left[\widetilde{x}(n)\right]^p \\ \widetilde{x}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k u(n-k) \end{aligned}$$

où $e(n)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ_e^2 et où le bit $u(n)$ prend ses valeurs de manière équiprobable dans l'ensemble $\{-1, +1\}$. Le problème de classification étudié dans cet exercice comporte deux classes a priori équiprobables définies par

$$\begin{array}{l} C_1 : u(n) = +1 \\ C_2 : u(n) = -1 \end{array} \tag{1}$$

1) Règle de décision Bayésienne

- On considère tout d'abord le scénario appelé scénario 1 défini par $M = 1, P = 1, c_1 = 1, N = 2$ et $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T = (1, 0.5)^T$.
  - Dans le cas où il n'y a pas de bruit (c'est-à-dire $e(n) = 0$), déterminer les valeurs possibles de $\mathbf{X}(n)$ conditionnellement aux classes C_1 et C_2 et représenter les graphiquement.
  - Dans le cas général où $e(n)$ est un bruit blanc Gaussien, déterminer les densités de $\mathbf{X}(n)$ conditionnellement aux classes C_1 et C_2 (notées $f(\mathbf{X}(n)|\, C_1)$ et $f(\mathbf{X}(n)|\, C_2)$) et en déduire le classifieur Bayésien associé.
- Déterminer les lois conditionnelles $f(\mathbf{X}(n)|\, C_1)$ et $f(\mathbf{X}(n)|\, C_2)$ pour le scénario 2 défini par $M = 2, P = 1, c_1 = 1, N = 2$ et $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T = (1, 0.5)^T$.
- Déterminer les lois conditionnelles $f(\mathbf{X}(n)|\, C_1)$ et $f(\mathbf{X}(n)|\, C_2)$ pour le scénario 3 défini par $M = 2, P = 3, \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T = (1, 0, -0.9), N = 2$ et $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T = (1, 0.5)^T$. Expliquer les résultats obtenus sur la figure 3 de l'article page 3221.

2) Apprentissage

On suppose que l'on connaît $P, \mathbf{c} = (c_1, ..., c_P)^T, N, \mathbf{h} = (h_0, ..., h_{N-1})^T$ et on désire estimer la variance du bruit $e(n)$ notée σ^2. Pour ce, on utilise une séquence d'apprentissage constituée de bits $u(n)$ connus et on observe le vecteur $\mathbf{X}(n)$.

- Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre σ^2.
- On suppose que le paramètre σ^2 est muni d'une loi a priori inverse gamma de paramètres α et β (définie sur $\mathbb{R}^+$) de densité

$$f\left(\sigma^2; \alpha, \beta\right) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\left(\sigma^2\right)^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right) I_{\mathbb{R}^+}\left(\sigma^2\right)$$

  où $I_{\mathbb{R}^+}(.)$ est la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire telle que $I_{\mathbb{R}^+}(x) = 1$ si $x > 0$ et $I_{\mathbb{R}^+}(x) = 0$ sinon). On utilisera la notation habituelle $\sigma^2 \sim IG(\alpha, \beta)$

  Déterminer la loi a posteriori de $\sigma^2 \big| \mathbf{X}(n)$ et l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre σ^2.

3) Fonction discriminante linéaire

On considère dans cette partie le scénario 2 et on propose de construire une fonction discriminante linéaire d'entrée $\mathbf{Y}(n) = [x(n), x(n-1), 1]^T$ définie par $g[\mathbf{Y}(n)] = \mathbf{w}^T\mathbf{Y}(n)$ avec $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ pour estimer le bit $u(n)$. On suppose que la suite $\{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire de moyenne $E[x(n)] = m$ et de fonction d'autocorrélation $r_x(k) = E[x(n)x(n-k)]$.

- Expliquer pourquoi la fonction g est adaptée au problème de classification (1).
- La sortie désirée de l'égaliseur associée à l'entrée $\mathbf{Y}(n)$ est $u(n)$. Montrer que le vecteur $\mathbf{w}$ qui minimise

$$J(\mathbf{w}) = E\left(\left[u(n) - \mathbf{w}^T\mathbf{Y}(n)\right]^2\right)$$

  vérifie un système d'équations linéaires par rapport à $\mathbf{w}$ dont les coefficients dépendent de m, des autocorrélations $r_x(0)$ et $r_x(1)$ et des intercorrélations $r_{ux}(0) = E[u(n)x(n)]$ et $r_{ux}(1) = E[u(n)x(n-1)]$.
- Donner les règles de mise à jour des poids w_1, w_2 et w_3 obtenues à partir de l'algorithme LMS.

4) Machines à vecteurs supports

On considère dans cette partie le scénario 3 et on considère l'égaliseur SVM présenté sur la figure 2 page 3220 avec $D = 0$.

- Expliquer tout d'abord pourquoi la fonction discriminante g de la question 3) n'est pas adaptée à ce scénario.
- Quelle est la règle de classification utilisée par l'égaliseur SVM pour un vecteur d'entrée $\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1)]^T$?
- Comment détermine-t-on les coefficients α_i intervenant dans l'équation (1) de l'article p. 3218 ?
- Comment calcule-t-on l'offset b intervenant dans l'équation (1) de l'article p. 3218 ? Justifier brièvement ce calcul.
- Retrouver la valeur de ξ donnée après l'équation (8) p. 3222.