
EXAMEN ÉLÉMENTS DE MODÉLISATION STATISTIQUE - MODIA

Jeudi 4 Février 2021, 9h30-10h15 (45 minutes)

Partiel avec feuille A4 recto-verso autorisée

Partie sur les tests non-paramétriques : Notes de deux groupes de TDs.

Cet exercice s'inspire d'un exercice du livre de Gregory Corder et Dale Foreman intitulé "Nonparametric Statistics: A Step-By-Step Approach" (voir page 90). Un enseignant désire tester si ses deux groupes de TDs notés G_1 et G_2 ont obtenus des résultats similaires lors de l'examen. Il a relevé les résultats suivants

G_1	$x_1 = 16$	$x_2 = 13$	$x_3 = 16$	$x_4 = 16$	$x_5 = 13$	$x_6 = 9$	$x_7 = 12$	$x_8 = 12$	$x_9 = 20$	$x_{10} = 17$
G_2	$y_1 = 11$	$y_2 = 2$	$y_3 = 10$	$y_4 = 4$	$y_5 = 9$	$y_6 = 8$	$y_7 = 5$	$y_8 = 6$	$y_9 = 4$	$y_{10} = 16$

1. **Test de Mann-Whitney.** Déterminer la valeur de la statistique de test en fonction des données du problème et donner sa loi asymptotique. Exprimer la p-valeur de ce test en fonction de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ notée F et des données du problème. Expliquer comment procéder pour décider si ces deux ensembles de résultats sont significativement différents avec un risque $\alpha = 0.05$.
2. **Test du χ^2 d'homogénéité.** Pour confirmer les résultats obtenus à la question précédente, on regroupe les différentes notes en 4 classes $C_1 = \{0, \dots, 4\}$, $C_2 = \{5, \dots, 10\}$, $C_3 = \{11, \dots, 15\}$ et $C_4 = \{16, \dots, 20\}$ pour obtenir le tableau suivant

	Groupe 1	Groupe 2	N_k
C_1	0	3	3
C_2	1	5	6
C_3	4	1	5
C_4	5	1	6
N_l	10	10	20

Exprimer la valeur de la statistique du test du χ^2 d'homogénéité en fonction des données du problème (sans chercher à la calculer) et sa loi asymptotique. Déterminer le seuil de détection en fonction de l'inverse de la fonction de répartition d'une loi du χ_K^2 notée F_K^{-1} pour une valeur de K que l'on déterminera. Expliquer comment déterminer si les résultats des deux groupes sont significativement différents ou pas.

3. **Test de normalité.** On désire tester s'il est raisonnable de supposer que les deux échantillons de notes associées aux deux groupes sont distribués suivant une loi normale ou pas. Expliquer le principe d'un test de normalité que vous pourriez utiliser pour résoudre ce problème.