

Jeudi 3 Février 2022

Examen ModIA - Partie Tests Non-paramétriques

Jean-Yves TOURNERET

**Exercice 1 : Comparaison des réussites de trois écoles**

Trois écoles ont relevé le nombre d'admis et d'ajournés au brevet dans le tableau suivant

	École 1	École 2	École 3	$N_k$
Admis	50	35	85	170
Ajournés	30	15	35	80
$N_l$	80	50	120	250

On désire tester si les résultats de ces trois écoles sont significativement différents à l'aide d'un test du  $\chi^2$  d'homogénéité

1. Exprimer la valeur de la statistique du test du  $\chi^2$  d'homogénéité notée  $I_n$  en fonction des données du problème (sans chercher à la calculer).
2. Déterminer la loi asymptotique de  $I_n$  et en déduire le seuil du test en fonction du risque de première espèce  $\alpha$  et de l'inverse de la fonction de répartition d'une loi du  $\chi_K^2$  notée  $F_K^{-1}$  pour une valeur de  $K$  que l'on déterminera.
3. Exprimer la p-valeur de ce test en fonction de  $I_n$  et de la fonction de répartition d'une loi du  $\chi_K^2$  notée  $F_K$  pour une valeur de  $K$  que l'on précisera.
4. Expliquer comment déterminer si les résultats de ces trois écoles sont significativement différents ou pas.

**Exercice 2 : Comparaison du prix de deux produits**

Les prix en euros d'un même produit dans deux régions Françaises sont indiqués dans le tableau ci-dessous

R 1	$x_1 = 14$	$x_2 = 15.5$	$x_3 = 16.5$	$x_4 = 17$	$x_5 = 18$	$x_6 = 15$	$x_7 = 19.5$	$x_8 = 20.5$	$x_9 = 21$	$x_{10} = 24$
R 2	$y_1 = 17.5$	$y_2 = 16$	$y_3 = 18.5$	$y_4 = 22.5$	$y_5 = 22$	$y_6 = 18$	$y_7 = 20$	$y_8 = 25$	$y_9 = 24$	$y_{10} = 41$

On aimerait déterminer si le prix du produit dans les deux régions sont différents ou pas.

1. Déterminer la valeur de la statistique du test de Wilcoxon  $W_m$  associée à ce problème.
2. Quelle est la loi asymptotique de  $W_m$ ? En utilisant cette loi asymptotique, exprimer la p-valeur du test de Wilcoxon en fonction de la fonction de répartition de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  notée  $F$ .
3. Expliquer le principe de la correction de continuité.
4. Expliquer comment procéder à l'aide de cette p-valeur pour décider si les deux ensembles de prix sont significativement différents avec un risque  $\alpha = 0.05$ .

**Exercice 3 : Droite de Henry**

1. Rappeler ce que représente une droite de Henry pour tester la loi normale.
2. Comment reconnaît-on que  $(x_1, \dots, x_n)$  est issu d'une loi normale à l'aide de la droite de Henry?