EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 23 Octobre 2023 (8h-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Lois de Bernoulli (7 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi de Bernoulli, i.e., telles que

$$P[X = 1] = P[Y = 1] = p \text{ et } P[X = 0] = P[Y = 0] = q = 1 - p.$$

avec $p \in]0, 1[$.

1. (2pts) Déterminer la loi du couple (U, T) avec $U = XY$ et $T = X$. En déduire la loi marginale de U.
   Le couple (X, Y) prend ses valeurs dans $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ avec les probabilités

   $$P[(X, Y) = (0, 0)] = q^2, P[(X, Y) = (1, 0)] = pq, P[(X, Y) = (0, 1)] = pq, P[(X, Y) = (1, 1)] = p^2.$$

   En effet, en utilisant l'indépendance de X et de Y, on par exemple

   $$P[(X, Y) = (0, 0)] = P[X = 0] \times P[Y = 0] = q \times q = q^2.$$

   Pour $(X, Y) = (0, 0)$ et $(X, Y) = (0, 1)$, on a $(U, T) = (0, 0)$, d'où

   $$P[(U, T) = (0, 0)] = P[(X, Y) = (0, 0)] + P[(X, Y) = (0, 1)] = q^2 + pq = q(q + p) = q.$$

   Pour $(X, Y) = (1, 0)$ on a $(U, T) = (0, 1)$, d'où

   $$P[(U, T) = (0, 1)] = P[(X, Y) = (1, 0)] = pq.$$

   Enfin

   $$P[(U, T) = (1, 1)] = P[(X, Y) = (1, 1)] = p^2.$$

   On remarquera que $q + pq + p^2 = q + p(q + p) = q + p = 1$. La loi marginale de U est définie par

   $$P[U = 0] = P[(U, T) = (0, 0)] + P[(U, T) = (0, 1)] = q + pq = 1 - p + p(1 - p) = 1 - p^2$$

   et

   $$P[U = 1] = P[(U, T) = (1, 1)] = p^2.$$

   U possède donc la loi de Bernoulli de paramètre p^2.

2. (2pts) Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (U, T). Les variables U et T sont-elles indépendantes ?
   La covariance du couple (U, T) est

   $$\text{cov}(U, T) = E[UT] - E[U]E[T].$$

   Mais

   $$E[UT] = P[(U, T) = (1, 1)] = p^2, E[U] = P[U = 1] = p^2 \text{ et } E[T] = P[T = 1] = P[X = 1] = p.$$

   On en déduit

   $$\text{cov}(U, T) = p^2 - p^3 = p^2 q.$$

   Le coefficient de corrélation du couple (U, T) est

   $$r_{U,T} = \frac{\text{cov}(U, T)}{\sqrt{\text{var}(U)\text{var}(T)}} = \frac{p^2 q}{\sqrt{p^2(1 - p^2) \times pq}} = \sqrt{\frac{p}{1 + p}}.$$

   Comme $r_{U,T} \neq 0$, les variables U et T ne sont pas indépendantes.

3. (1pt) Déterminer la loi conditionnelle de $T|U=0$.
Il est clair que $T|U=0$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$. De plus, on a :
$$P[T=0|U=0]=\frac{P[T=0,U=0]}{P[U=0]}=\frac{q}{1-p^2}=\frac{1}{1+p}.$$
De plus
$$P[T=1|U=0]=\frac{P[T=1,U=0]}{P[U=0]}=\frac{pq}{1-p^2}=\frac{p}{1+p}.$$

4. (2pt) Déterminer la fonction caractéristique de X. En utilisant le théorème des espérances conditionnelles, déterminer la fonction caractéristique de $U=XY$. Retrouver la loi de U déterminée à la première question.
D'après les tables, comme X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, on a
$$E\left[e^{itX}\right]=pe^{it}+q.$$
La fonction caractéristique de U est
$$E\left[e^{itU}\right]=E\left[e^{itXY}\right]=E\left[E\left[e^{itXY}|Y\right]\right]=E\left[pe^{itY}+q\right]=pE\left[e^{itY}\right]+q.$$
On en déduit, en utilisant le fait que Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p
$$E\left[e^{itU}\right]=p\left(pe^{it}+q\right)+q=p^2e^{it}+pq+q=p^2e^{it}+1-p^2.$$
qui est la fonction caractéristique d'une loi de Bernoulli de paramètre p^2. On retrouve le résultat de la première question.

Exercice 2: (9 **points**)

On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) de densité
$$p(x,y)=\frac{|x|}{2\pi\sqrt{3}}\exp\left[-\frac{1}{6}x^2(1+3y^2)\right],(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

1. (2pts) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables aléatoires X et Y sont toutes deux à valeurs dans $\mathbb{R}$ de densités
$$p(x,.)=\int_{\mathbb{R}}p(x,y)dy \text{ et } p(.,y)=\int_{\mathbb{R}}p(x,y)dx.$$
Donc on
$$p(x,.)=\frac{|x|}{2\pi\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{x^2}{6}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{x^2y^2}{2}\right)dy.$$
On reconnait l'intégrale d'une densité gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma^2=\frac{1}{x^2}$ qui vaut $\sqrt{2\pi\sigma^2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{|x|}$. On peut aussi faire le changement de variables $u=|x|y$ dans cette intégrale, pour obtenir
$$p(x,.)=\frac{|x|}{2\pi\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{x^2}{6}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\frac{du}{|x|}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{6}\right),x\in\mathbb{R}.$$
donc $X\sim\mathcal{N}(0,3)$ (attention, si on fait le changement de variables $u=xy$, pour $x<0$, les bornes de l'intégrale changent !). De même
$$p(.,y)=\int_{\mathbb{R}}\frac{|x|}{2\pi\sqrt{3}}\exp\left[-\frac{1}{6}x^2(1+3y^2)\right]dx=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^{+\infty}x\exp\left[-\frac{1}{6}x^2(1+3y^2)\right]dx.$$

On en déduit

$$p(.,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\frac{-3}{1+y^2}\exp\left(-\frac{1}{6}x^2(1+3y^2)\right)\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\sqrt{3}}{\pi(1+3y^2)}, y \in \mathbb{R}.$$

2. (4pts) On effectue le changement de variables $U = XY$ et $T = X$. Montrer que (U,T) est un vecteur gaussien dont on déterminera le vecteur moyenne $\boldsymbol{m}$ et la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$. En déduire les lois marginales de U et de T. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?
Le changement de variables est clairement bijectif car

$$\left\{\begin{array}{c} U = XY \\ T = X \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} X = T \\ Y = \frac{U}{T} \end{array}\right.$$

Le Jacobien du changement de variables est $|\det(J)|$ avec

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial T} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{T} & -\frac{U}{T^2} \end{pmatrix}.$$

Donc $|\det(J)| = \frac{1}{|T|}$. On en déduit la densité du couple (T,U) :

$$g(t,u) = \frac{|t|}{2\pi\sqrt{3}}\exp\left[-\frac{t^2}{6}\left(1+\frac{3u^2}{t^2}\right)\right] \times \frac{1}{|t|} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\exp\left[-\frac{t^2+3u^2}{6}\right] (u,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme le terme à l'intérieure de l'exponentielle est une forme quadratique de (t,u), cette densité peut se mettre sous la forme

$$g(t,u) = \frac{1}{2\pi\det(\Sigma)}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m})\right],$$

avec $\boldsymbol{z} = (t,u)^T$, $\boldsymbol{m} = (0,0)^T$. Pour obtenir $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, il suffit de calculer les dérivées secondes de $\frac{1}{6}(t^2+3u^2)$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en conclut que $\boldsymbol{Z} = (T,U)^T$ est un vecteur gaussien de vecteur moyenne $\boldsymbol{m} = (0,0)^T$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ définie ci-dessus. D'après le cours, on en déduit $T \sim \mathcal{N}(0,3)$ et $U \sim \mathcal{N}(0,1)$. Comme la matrice de covariance de ce vecteur est diagonale, les variables T et U sont indépendantes.

3. (2pts) Déterminer la covariance du couple (X,Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
On a

$$\text{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[U] - E[X]E[Y].$$

Comme $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X \sim \mathcal{N}(0,3)$, on a $E[U] = E[X] = 0$ et donc $\text{cov}(X,Y) = 0$ et pourtant les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $p(x,y) \neq p(x,.)p(.,y)$.

4. (1pt) Exprimer $V = X(1+Y)$ en fonction de T et U et en déduire la loi de V.
On a $V = X(1+Y) = T+U$. Comme les variables T et U sont indépendantes, on en déduit $V \sim \mathcal{N}(0,4)$.

Exercice 3 : (6 points)

On considère un vecteur Gaussien $(X,Y)^T \in \mathbb{R}^2$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ (supposée symétrique définie positive). L'objectif de cet exercice est de montrer que la moyenne de la variable aléatoire $Y|X$ est définie par

$$E[Y|X] = E[Y] + \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)}\left[X - E(X)\right].$$

1. (1pt) Rappeler l'expression des éléments de $\boldsymbol{\Sigma}$ en fonction de var(X), var(Y) et cov(X,Y).
   Nous avons vu en cours que

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(X,Y) & \text{var}(Y) \end{pmatrix}.$$

2. (3pts) Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V} = [X,Z]^T$ avec $Z = Y - u(X)$ et $u(X) = E[Y] + \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)}[X - E(X)]$ est un vecteur Gaussien dont on déterminera le vecteur moyenne et la matrice de covariance. En déduire que les variables X et $Z = Y - u(X)$ sont indépendantes.
   Le vecteur V est obtenu par transformation affine de (X,Y) puisque $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}(X,Y)^T + \boldsymbol{b}$ avec

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)} & 1 \end{pmatrix}.$$

   et

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-}E[Y] + \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)}E[X] \end{pmatrix}$$

   La matrice $\boldsymbol{A}$ étant de rang 2, V est un vecteur Gaussien de moyenne $E[V] = \boldsymbol{A\mu} + \boldsymbol{b}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{A\Sigma A}^T$. Mais

$$E[V] = \boldsymbol{A\mu} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{pmatrix} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} E[X] \\ 0 \end{pmatrix}$$

   et

$$\boldsymbol{A\Sigma A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(X,Y) & \text{var}(Y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)} & 1 \end{pmatrix}^T.$$

   Après calculs, on trouve

$$\boldsymbol{A\Sigma A}^T = \begin{pmatrix} \text{var}(X) & 0 \\ 0 & \text{var}(Y) \text{ - } \frac{\text{cov}^2(X,Y)}{\text{var}(X)} \end{pmatrix}$$

   Comme la covariance des variables X et Z est nulle et que $\boldsymbol{V} = [X,Z]^T$ est un vecteur gaussien, on en déduit que X et $Z = Y - u(X)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

3. (2pts) En utilisant la relation $Y = Z + u(X)$ et le fait que Z et X sont des variables aléatoires indépendantes, montrer que $E[Y|X] = E[Z] + u(X)$ et conclure.
   On a

$$E[Y|X] = E[Z + u(X)|X] = E[Z|X] + u(X).$$

   Comme les variables X et Z sont indépendantes, on a $E[Z|X] = E[Z]$. Mais on a vu que $E[Z] = 0$, d'où

$$E[Y|X] = u(X) = E[Y] + \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)}\left[X - E(X)\right].$$

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	$\mathbf{m}$	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it}+q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, , C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : np_jq_j Covariance : $-np_jp_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi_2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)