CORRECTION EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN Lundi 21 octobre 2024 (8h00-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Changement de variables continues (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} 2y \text{ si } y \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X,Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
   En utilisant l'indépendance des variables X et Y, on peut déterminer la densité du couple (X,Y)

$$p(x,y) = p(x,.) \times p(.,y) = \begin{cases} y \text{ si } (x,y) \in]-1,1[\times[0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. On définit les deux variables aléatoires $Z = \frac{Y}{X}$ et $T = X$. Quelle est la loi du couple (Z,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
   Le changement de variables est clairement bijectif car

$$\begin{cases} Z = \frac{Y}{X} \\ T = X \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = T \\ Y = ZT \end{cases}$$

   Le Jacobien du changement de variables est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & T \\ 1 & Z \end{vmatrix} = -T.$$

   On en déduit la densité du couple (Z,T) :

$$\boxed{g(z,t) = tz \times |t| I_{\Delta}(z,t)}$$

   où Δ est le domaine de définition du couple (Z,T) qu'il convient de déterminer. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \\ 0 < zt < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ 0 < z < \frac{1}{t} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -1 < t < 0 \\ \frac{1}{t} < z < 0 \end{cases}$$

   Le domaine en question est illustré sur la figure 1.

3. Déduire de la question précédente la loi marginale de Z (on pourra vérifier que l'intégrale de cette densité est égale à 1 pour éviter une éventuelle erreur de calcul).
   D'après la figure, la loi marginale de Z est définie sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g(z,.) = \int_{\mathbb{R}} g(z,t)dt = \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{z}} g(z,t)dt \text{ si } z \geq 1 \\ \int_0^1 g(z,t)dt \text{ si } 0 \leq z \leq 1 \\ \int_{-1}^0 g(z,t)dt \text{ si } -1 \leq z \leq 0 \\ \int_{\frac{1}{z}}^0 g(z,t)dt \text{ si } z \leq -1 \end{cases}$$

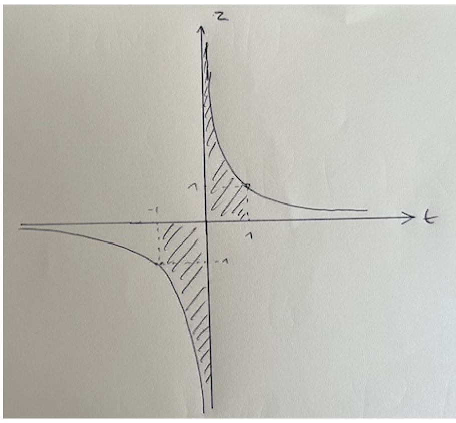

Figure 1: Représentation graphique du domaine du couple (Z, T).

soit

$$g(z,.) = \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{z}} t^2 z dt = z \times \frac{1}{3z^3} = \frac{1}{3z^2} \text{ si } z \geq 1 \\ \int_0^1 t^2 z dt = z \times \frac{1}{3} = \frac{z}{3} \text{ si } 0 \leq z \leq 1 \\ \int_{-1}^0 -t^2 z dt = -z \times \frac{1}{3} = \frac{-z}{3} \text{ si } -1 \leq z \leq 0 \\ \int_{\frac{1}{z}}^0 -t^2 z dt = z \times \frac{1}{3z^3} = \frac{1}{3z^2} \text{ si } z \leq -1 \end{cases}$$

On vérifie que l'intégrale de cette densité vaut 1. En effet

$$\int_{\mathbb{R}} g(z,.) dz = \int_1^{\infty} \frac{1}{3z^2} dz + \int_0^1 \frac{z}{3} dz + \int_{-1}^0 \frac{-z}{3} dz + \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{3z^2} dz = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1.$$

4. Déterminer la covariance du couple (Z, T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
La covariance du couple (Z, T) est définie par

$$\text{cov}(Z,T) = E[ZT] - E[Z]E[T] = E[Y] - E\left[\frac{Y}{X}\right] E[X].$$

En utilisant l'indépendance entre X et Y, on obtient

$$\text{cov}(Z,T) = E[Y] - E[Y]E\left[\frac{1}{X}\right] E[X].$$

Mais $E[X] = 0$ et $E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$, donc

$$\text{cov}(Z,T) = E[Y] = \frac{2}{3}.$$

Comme $\text{cov}(Z,T) \neq 0$, les variables Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 2 : Vecteurs Gaussiens (6 **points) (inspiré d'un exercice de D. Pastor et C. Sintes)**

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ de vecteur moyenne nul et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\rho \in]-1, +1[$.

1. (1pt) On admet que les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ sont $\lambda_1 = 2 + \sqrt{1+3\rho^2}$ et $\lambda_2 = 2 - \sqrt{1+3\rho^2}$. Pourquoi doit-on imposer la condition $\rho \in]-1, +1[$ pour que $\boldsymbol{X}$ soit un vecteur gaussien ?
   Pour que $\boldsymbol{X}$ soit un vecteur Gaussien, il faut que la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ soit symétrique définie positive, ce qui est vérifié si ces deux valeurs propres sont strictement positives, soit

   $$2 + \sqrt{1+3\rho^2} > 0 \text{ et } 2 - \sqrt{1+3\rho^2} > 0.$$

   La seconde condition impose $\rho^2 < 1$ soit $\rho \in]-1, +1[$.

2. (2pts) Déterminer les variances des variables X_1 et X_2 notées $\text{var}(X_1)$ et $\text{var}(X_2)$, et la covariance du vecteur $\boldsymbol{X}$ notée $\text{cov}(X_1, X_2)$. En justifiant proprement votre réponse, indiquer la valeur de ρ pour laquelle les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.
   Puisque

   $$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) \\ \text{cov}(X_1, X_2) & \text{var}(X_2) \end{pmatrix},$$

   on a $\text{var}(X_1) = 3$, $\text{var}(X_2) = 1$ et $\text{cov}(X_1, X_2) = \rho\sqrt{3}$. Pour un vecteur Gaussien, indépendance et covariance nulle sont des propriétés équivalentes. Donc X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\rho = 0$.

3. (2pts) On construit les deux variables aléatoires $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}X_1 - X_2$ et $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}X_1 + X_2$. Quelle est la loi du vecteur $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$?
   On a $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ avec

   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}.$$

   Comme la matrice $\boldsymbol{A}$ est de rang 2, le vecteur $\boldsymbol{Y}$ est gaussien. Le vecteur moyenne de $\boldsymbol{Y}$ est

   $$E[\boldsymbol{Y}] = E[\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{A}E[\boldsymbol{X}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   et sa matrice de covariance est

   $$E[\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

   $$E[\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T] = \begin{pmatrix} 2(1-\rho) & 0 \\ 0 & 2(1+\rho) \end{pmatrix}.$$

4. (1pt) Déterminer les lois marginales des variables Y_1 et Y_2. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes (justifier votre réponse avec soin) ?
   Les lois marginales d'un vecteur gaussien sont gaussiennes. En regardant la matrice de covariance de $\boldsymbol{Y}$, on en déduit $Y_1 \sim \mathcal{N}(0, 2(1-\rho))$ et $Y_2 \sim \mathcal{N}(0, 2(1+\rho))$. Puisque $\boldsymbol{Y}$ est un vecteur gaussien et que $\text{cov}(Y_1, Y_2) = 0$, les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

Exercice 3 : Cumulants d'une variable aléatoire réelle (6 points)

On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire réelle X est définie par $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right], t \in \mathbb{R}$ et que le développement de Taylor de la fonction e^x au voisinage de $x = 0$ est $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

1. (2pts) Rappeler comment on peut obtenir les moments $m_k = E[X^k]$ de la variable aléatoire X à partir de $M_X(t)$. Déterminer la fonction $M_X(t)$ pour une loi de Poisson de paramètre λ et retrouver l'expression de la moyenne $m_1 = E[X]$ et du moment d'ordre $m_2 = E[X^2]$ de cette loi de Poisson.
   À partir du développement de Taylor de e^x, nous avons vu en cours que
   $$m_k = \left.\frac{\partial^k M_X(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}.$$
   La fonction caractéristique d'une loi de Poisson est
   $$E\left[e^{itX}\right] = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right].$$
   Donc $M_X(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right]$. On en déduit
   $$m_1 = \left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left\{\lambda e^t \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right]\right\}_{t=0} = \lambda.$$
   et
   $$m_2 = \left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \left\{\lambda^2 e^t \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right] + \lambda e^t \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right]\right\}_{t=0} = \lambda^2 + \lambda.$$

2. (2pts) On appelle fonction génératrice des cumulants la fonction $C_X(t) = \ln[M_X(t)]$ qui admet généralement un développement de Taylor autour de $t = 0$ de la forme
   $$C_X(t) = \ln[M_X(t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{X,k} \frac{t^k}{k!},$$
   où les coefficients $\kappa_{X,k}, k \geq 1$ sont appelés cumulants de la variable aléatoire X. En utilisant les tables de lois et en remarquant qu'on obtient $M_X(t)$ à partir de la fonction caractéristique en remplaçant t par $-it$, déterminer $C_X(t)$ pour une loi de Poisson et pour une loi normale. En déduire les cumulants d'une loi de Poisson et d'une loi normale.
   Pour une loi de Poisson, on a
   $$C_X(t) = \ln[M_X(t)] = \lambda\left(e^t - 1\right) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$
   Tous les cumulants d'une loi de Poisson sont donc égaux à λ.
   Pour une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a
   $$M_X(t) = \exp\left(mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$
   d'où
   $$C_X(t) = \ln[M_X(t)] = mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}.$$
   Les deux premiers cumulants d'une lois normale sont donc $\kappa_{X,1} = m$, $\kappa_{X,2} = \sigma^2$ et tous les autres cumulants sont nuls.

3. (1pt) En s'inspirant de la première question, expliquer comment déterminer les cumulants d'une variable aléatoire X par dérivations successives de $C_X(t)$.
Par dérivations successives de $C_X(t)$, on obtient

$$\kappa_{X,k} = \left.\frac{\partial^k C_X(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}.$$

4. (1pt) On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y et on construit $Z = X + Y$. Déterminer la fonction génératrice des cumulants de Z en fonction de $C_X(t)$ et de $C_Y(t)$. En déduire comment déterminer les cumulants de Z en fonction de ceux de X et de Y.
Comme $e^Z = e^{X+Y} = e^X e^Y$, on a

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t),$$

d'où

$$C_{X+Y}(t) = \ln[M_{X+Y}(t)] = \ln[M_X(t)] + \ln[M_Y(t)] = C_X(t) + C_Y(t).$$

Comme

$$C_X(t) + C_Y(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{X,k}\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{Y,k}\frac{t^k}{k!},$$

on en déduit

$$\kappa_{Z,k} = \kappa_{X,k} + \kappa_{Y,k}, \forall k \geq 1.$$

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X=k] \qquad p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it}+q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0,1,...,n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it}+q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0,1,\ldots,n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : np_jq_j Covariance : $-np_jp_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géometrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)