CORRECTION EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 20 octobre 2025

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Changement de variables discrètes (5 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires binaires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ définies sur l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$. On rappelle que

$$P[X=1] = P[Y=1] = p \text{ et } P[X=0] = P[Y=0] = q = 1-p.$$

1. Déterminer la fonction caractéristique de $U = X+Y$ et en déduire la loi de U.
   La fonction caractéristique de U vérifie

$$\phi_U(t) = E\left[e^{itU}\right] = E\left[e^{itX}e^{itY}\right] = \phi_X(t)\phi_Y(t),$$

   où on a utilisé l'indépendance entre les variables X et Y. Les tables permettent d'obtenir

$$\phi_U(t) = \left(pe^{it}+q\right)^2$$

   qui est la fonction caractéristique d'une loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$, donc $U \sim \mathcal{B}(2,p)$.

2. Déterminer la loi du couple (U,V) avec

$$\begin{cases} U = X+Y \\ V = X \end{cases}$$

   La loi du couple (X,Y) est définie par

$$\begin{aligned} P\left[X=0,Y=0\right] &= P\left[X=0\right]P\left[Y=0\right] = q^2 \\ P\left[X=1,Y=0\right] &= P\left[X=1\right]P\left[Y=0\right] = pq \\ P\left[X=0,Y=1\right] &= P\left[X=0\right]P\left[Y=1\right] = pq \\ P\left[X=1,Y=1\right] &= P\left[X=1\right]P\left[Y=1\right] = p^2. \end{aligned}$$

   Le changement de variables proposé est bijectif avec

$$\begin{aligned} P\left[U=0,V=0\right] &= P\left[X=0,Y=0\right] = q^2 \\ P\left[U=1,V=0\right] &= P\left[X=0,Y=1\right] = pq \\ P\left[U=1,V=1\right] &= P\left[X=1,Y=0\right] = pq \\ P\left[U=2,V=1\right] &= P\left[X=1,Y=1\right] = p^2. \end{aligned}$$

3. Déterminer la loi marginale de U à partir de la loi du couple (U,V) et retrouver le résultat de la première question.
   La loi marginale de U s'obtient à partir de celle du couple par sommation puisque $P[U=u_i] = \sum_j P[U=u_i, V=V_j]$. On en déduit

$$\begin{aligned} P\left[U=0\right] &= P\left[U=0,V=0\right] = q^2 \\ P\left[U=1\right] &= P\left[U=1,V=0\right] + P\left[U=1,V=1\right] = 2pq \\ P\left[U=2\right] &= P\left[U=2,V=1\right] = p^2 \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$P[U = k] = \binom{2}{k} p^k q^{2-k}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

On retrouve les probabilités d'une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$.

4. Déterminer le coefficient de corrélation du couple (U, V).
   Le coefficient de corrélation du couple (U, V) est défini par

$$\rho = \frac{\text{cov}(U, V)}{\sigma_U \sigma_V},$$

où $\sigma_U = \sqrt{2pq}$ et $\sigma_V = \sqrt{pq}$ sont les écart-types d'une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$ et d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}e(p)$. De plus

$$\text{cov}(U, V) = E[UV] - E[U]E[V] = E[(X + Y)X] - E[X + Y]E[X] = \text{var}(X) = pq.$$

Donc

$$\rho = \frac{pq}{\sqrt{2pq \times pq}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Déterminer la fonction de répartition de U et représenter la graphiquement pour $p = q = \frac{1}{2}$.
   La fonction de répartition de U notée F est une fonction en escaliers définie par

$$P[U < x] = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ q^2 \text{ si } x \in]0, 1] \\ q^2 + 2pq \text{ si } x \in]1, 2] \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Elle est représentée ci-dessous pour $p = q = \frac{1}{2}$

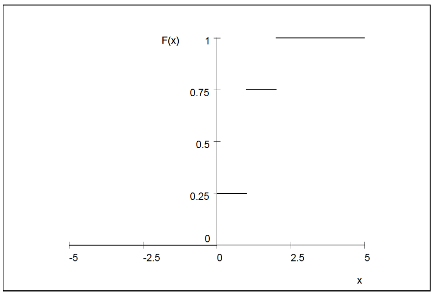

Figure 1: Représentation graphique de la fonction de répartition de la variable U.

Exercice 2 : Changement de variables continues (7 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois gamma $\Gamma(a,\theta)$ et $\Gamma(b,\theta)$, i.e., de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} \frac{\theta^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} e^{-\theta y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X, Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
   Comme les variables X et Y sont indépendantes, la densité du couple vérifie $p(x,y) = p(x,.)p(.,y)$. Elle est donc définie sur le domaine $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et on a

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} y^{b-1} e^{-\theta(x+y)} \text{ si } x > 0, y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. On définit les deux variables aléatoires $S = X + Y$ et $T = \frac{X}{X+Y}$. Quelle est la loi du couple (S, T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
   Le changement de variables est clairement bijectif car

$$\begin{cases} S = X + Y \\ T = \frac{X}{X+Y} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = ST \\ Y = S(1-T) \end{cases}$$

   Le Jacobien du changement de variables est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial S} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T & 1-T \\ S & -S \end{vmatrix} = -S.$$

   On en déduit la densité du couple (Z, T) :

$$\boxed{g(s,t) = \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} s^{a+b-1} t^{a-1} (1-t)^{b-1} e^{-\theta s} I_\Delta(s,t)}$$

   où Δ est le domaine de définition du couple (S,T) qu'il convient de déterminer. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} st > 0 \\ s(1-t) > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s > 0, t > 0 \\ 1 - t > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} s < 0, t < 0 \\ 1 - t < 0 \end{cases}$$

   Les conditions liées au second domaine sont incompatibles ($t < 0$ et $t > 1$) donc le domaine se réduit à

$$s > 0 \text{ et } t \in]0,1[.$$

3. Montrer que la densité de (S,T) s'écrit comme le produit d'une densité de loi gamma et d'une densité de loi beta dont on déterminera les paramètres. En déduire les lois marginales de S et de T. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ? En déduire sans faire de calculs les moyennes et variances de S et T notées $E[S]$, $E[T]$, $\text{var}[S]$, $\text{var}[T]$ et $\text{cov}(S,T)$.
   En regardant les tables, on observe que la densité du couple (S,T) est le produit de la densité d'une loi gamma $\mathcal{G}(a+b,\theta)$ et de la densité d'une loi beta $\mathcal{B}(a,b)$. Donc la détermination des lois marginales se fait simplement par intégration de la loi du couple :

$$f(s,.) = \int_{\mathbb{R}} f(s,t)dt = \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a+b)} s^{a+b-1} e^{-\theta s} I_{]0,+\infty[}(s)$$

et
$$f(.,t)=\int_{\mathbb{R}} f(s,t)ds=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}I_{]0,1[}(t).$$
On en déduit
$$E[S]=\frac{a+b}{\theta}, \text{var}[S]=\frac{a+b}{\theta^2}$$
et
$$E[T]=\frac{a}{a+b}, \text{var}[T]=\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}.$$
Comme $f(s,t) = f(s,.)f(.,t), \forall(s,t)$, les deux variables S et T sont indépendantes et donc $\text{cov}(S,T)=0$.

4. Montrer que
$$E\left[\frac{X}{X+Y}\right]=\frac{E[X]}{E[X]+E[Y]}.$$
Que pensez-vous de ce résultat ?
On a
$$E\left[\frac{X}{X+Y}\right]=E[T]=\frac{a}{a+b} \text{ et } \frac{E[X]}{E[X]+E[Y]}=\frac{E[X]}{E[S]}=\frac{\frac{a}{\theta}}{\frac{a+b}{\theta}}=\frac{a}{a+b},$$
donc
$$E\left[\frac{X}{X+Y}\right]=\frac{E[X]}{E[X]+E[Y]}.$$
Ce résultat est surprenant car la moyenne du rapport de deux variables aléatoires diffère en général du rapport des moyennes !!

5. On veut vérifier que la loi de S obtenue à la question précédente est correcte. Déterminer la fonction caractéristique de S en fonction de celles de X et de Y et conclure.
La fonction caractéristique de S est :
$$\phi_S(t)=E\left[e^{itS}\right]=E\left[e^{itX}e^{itY}\right]=\phi_X(t)\phi_Y(t)=\frac{1}{\left(1-it\frac{t}{\theta}\right)^a}\frac{1}{\left(1-it\frac{t}{\theta}\right)^b}=\frac{1}{\left(1-it\frac{t}{\theta}\right)^{a+b}}$$
qui est la fonction caractéristique d'une loi gamma $\mathcal{G}(a+b,\theta)$ et donc $S\sim\mathcal{G}(a+b,\theta)$.

Exercice 3 : Vecteurs gaussiens (7 points)

Dans cet exercice, les lettres majuscules en gras sont associées à des matrices tandis que les lettres minuscules en gras indiquent des vecteurs. On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{v}=(X,Y)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m_v}=(0,0)^T$ et de matrice de covariance
$$\boldsymbol{\Sigma_v}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
et on cherche à construire à partir de ce vecteur $\boldsymbol{v}$ un autre vecteur gaussien $\boldsymbol{w}$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m_w}=(1,2)^T$ et de matrice de covariance
$$\boldsymbol{\Sigma_w}=\begin{pmatrix}1&r\\r&1\end{pmatrix}$$
avec $|r|<1$ (on admettra que les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\Sigma_w}$ sont $\lambda_1=1-r$ et $\lambda_2=1+r$). Pour ce, on considère la transformation $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{A}$ est une matrice de taille 2×2 et $\boldsymbol{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la condition $|r| < 1$ doit être vérifiée.
   Pour que la matrice $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$ soit définie positive, il faut que ses deux valeurs propres soient positives, d'où la condition $|r| < 1$.

2. Sous quelle condition le vecteur $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$ est-il un vecteur gaussien ?
   Il faut que la matrice $\boldsymbol{A}$ soit de rang maximum, c'est-à-dire de rang 2.

3. En utilisant la relation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$, déterminer $E[\boldsymbol{w}]$ et en déduire le vecteur $\boldsymbol{b}$ recherché.
   On a
   $$E[\boldsymbol{w}] = \boldsymbol{A}E[\boldsymbol{v}] + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b},$$
   car le vecteur $\boldsymbol{v}$ est de moyenne nulle. Donc
   $$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. En utilisant la relation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$, déterminer la matrice de covariance de $\boldsymbol{w}$ en fonction de la matrice $\boldsymbol{A}$. En écrivant la matrice $\boldsymbol{A}$ sous la forme
   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
   déterminer des réels α, β et γ répondant au problème posé.
   D'après les résultats du cours, la matrice de covariance de $\boldsymbol{w}$ s'écrit
   $$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$$
   puisque $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{v}}$ est la matrice identité. En remplaçant $\boldsymbol{A}$ par son expression, on obtient
   $$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$
   Après identification avec la matrice recherchée, on en déduit
   $$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \beta\gamma = r \\ \gamma^2 = 1. \end{cases}$$
   Une solution est donc
   $$\begin{cases} \alpha = \sqrt{1 - r^2} \\ \beta = r \\ \gamma = 1. \end{cases}$$

5. Quelle sont les lois des variables aléatoires $T = 2X + Y + 3$ et $U = X^2 + Y^2$?
   T est obtenue par transformation affine du vecteur $(X, Y)^T$ à l'aide de la matrice $\boldsymbol{M} = [2\ ,\ 1]$. Puisque cette matrice est de rang 1, T suit une loi normale de moyenne $E[T] = 2E[X] + E[Y] + 3 = 3$ et de variance $\mathrm{Var}(T) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{M}^T = 5$. D'après un résultat du cours, U suit une loi du khi deux à deux degrés de liberté.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géometrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	Expression compliquée
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi_2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},\ \Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	Expression compliquée
Pareto $P(a, b)$	$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]a, +\infty[$	$\frac{ab}{b-1}$	$\frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$	Expression compliquée