EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

Lundi 21 octobre 2019 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (5 points)

On considère une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définie dans $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ par

$$P[X = x_i] = p(1-p)^{x_i - 1}, \quad x_i = 1, 2, ...$$

Une telle loi est de moyenne $E[X] = \frac{1}{p}$, de variance $\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$ avec $q = 1 - p$ et de fonction caractéristique $\phi(t) = \dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$ (voir tables) et on adoptera la notation classique $X \sim \mathcal{G}(p)$.

1. Montrer que $P[X > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P[X > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ est une loi géométrique (on pourra exprimer $P[X = k]$ en fonction de $P[X > k]$ et de $P[X > k-1]$).
3. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi géométrique de paramètre p (i.e., $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$) et le minimum de ces deux variables $Z = \min\{X, Y\}$. Déterminer $P[Z > k]$ et en déduire que Z suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
4. Montrer qu'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p vérifie la propriété suivante (on dit que cette loi est "sans mémoire")

$$P[X > k + l | X > l] = P[X > k], \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2.$$

Exercice 2: Changement de variables (10 points)

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité

$$p(x, y) = \begin{cases} A \text{ si } x \in]-1, +1[\text{ et } 0 < y < |x| \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où A est une constante positive.

1. Représenter graphiquement le domaine de (X, Y) et en déduire que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Déterminer la valeur de A.
3. Déterminer la densité marginale de X.
4. Montrer que Y suit une loi Beta dont on déterminera les paramètres.
5. Déterminer les moyennes $E[X], E[Y]$ et les variances $\text{Var}[X], \text{Var}[Y]$ (en s'aidant lorsque cela est possible des tables de lois).
6. Déterminer la covariance du couple (X, Y).
7. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = \frac{Y}{X}$ et $T = X$.

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (5 points)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m} = (0, 0, 0)^T$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ définie comme suit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les lois de la variable aléatoire X_1 et du vecteur (X_2, X_3).

2. On pose $V = X_2$ et $W = X_3 - aX_2$, où $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi du couple (V, W) ? Pour quelle valeur de a les variables V et W sont-elles indépendantes (justifier avec soin vos réponses).

3. Déterminer une matrice $\boldsymbol{M}$ de taille 3×3 telle que le vecteur $(U, V, W)^T = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}$ soit constitué de trois variables aléatoires mutuellement indépendantes.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	**m**	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ, ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

Ex1 (6 points)

1) $P[X>k] = P[X=k+1 \text{ ou } X=k+2 \text{ ou} \cdots]$

$$= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = p(1-p)^k \left[1+(1-p)+(1-p)^2+\cdots\right]$$

1

$$= p(1-p)^k \frac{1}{(1-(1-p))} = \boxed{q^k} \text{ avec } q=1-p$$

2) On a $P[X>k-1] = P[X=k \text{ ou } X=k+1 \text{ ou} \cdots]$

et $P(X>k) = P(X=k+1 \text{ ou } X=k+2 \text{ ou} \cdots)$

donc $\boxed{P(X=k) = P[X>k-1] - P[X>k] \quad \forall k \in \mathbb{N}^*}$

1 Si $P(X>k) = q^k \ \forall k \in \mathbb{N}$ alors

$$P(X=k) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1-q) = \boxed{p\, q^{k-1}}$$

donc $\boxed{X \sim \mathcal{G}(p)}$

3) On sait que $\mathrm{Min}\{X,Y\} > k \iff X>k \text{ et } Y>k$

1 donc $P[Z>k] \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ et } Y \text{ ind}}}{=} P[X>k]\,P(Y>k) = q^k \times q^k = \boxed{(q^2)^k}$

1 On en conclut que $\boxed{Z \sim \mathcal{G}(1-q^2)}$

4) $P[X>k+\ell \mid X>\ell] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{définition d'une probabilité conditionnelle}}}{=} \dfrac{P[X>k+\ell \text{ et } X>\ell]}{P[X>\ell]}$

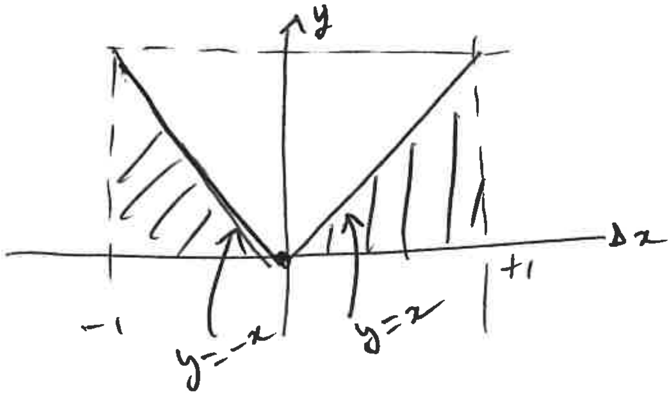
$$= \frac{P[X>k+\ell]}{P(X>\ell)} = \frac{q^{k+\ell}}{q^\ell} = q^k$$

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $P(X>k) = q^k$ donc la loi géométrique est sans mémoire, i.e

1pt $\boxed{P(X>k+\ell \mid X>\ell) = P(X>k) \quad \forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$

Ex2

1)



Δ = domaine du couple (X,Y)
= domaine hachuré

1pt

le domaine du couple (X,Y) n'est pas une réunion de pavés
donc X et Y ne sont pas indépendantes

2) On sait que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} p(x,y) = 1 \iff \iint_\Delta A\,dx\,dy = 1 \iff A \text{ Aire}(\Delta) = 1$$

1pt

donc $A = \frac{1}{\text{Aire}(\Delta)} = \boxed{1 = A}$

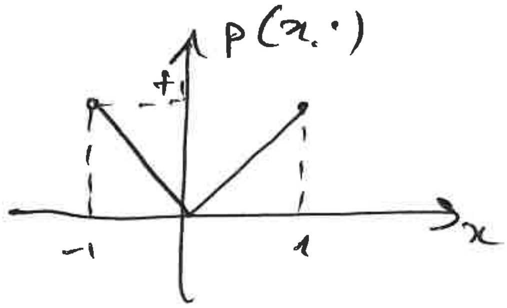
3) Les lois de X et Y s'obtiennent par intégration de $p(x,y)$
soit $p(x,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)\,dy$ et $p(\cdot,y) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)\,dx$

Densité de X

$$p(x,\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ \int_0^x 1\,dy = x & \text{si } x \in [0,1[\\ \int_0^{-x} 1\,dy = -x & \text{si } x \in]-1,0] \end{cases}$$

1pt

Soit $p(x,\cdot) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ |x| & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$



4) Densité de Y

$$p(\cdot,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ou } y \geq 1 \\ \underbrace{\int_{-1}^{-y} 1\,dx}_{1-y} + \int_y^1 1\,dx = 2(1-y) & \text{si } y \in]0,1[\end{cases}$$

Donc $\boxed{p(\cdot,y) = 2(1-y)\,\mathbb{1}_{]0,1[}(y)}$ où $\mathbb{1}_{]0,1[}(y)$ est la fonction indicatrice sur $]0,1[$

On reconnait une loi Beta $B(a,b)$ avec $a=1$ et $b=2$

5) Puisque $Y \sim B(1,2)$, on a d'après les tables

$$E[Y] = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \operatorname{Var} Y = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = \frac{2}{9\times 4} = \frac{1}{18}$$

De plus

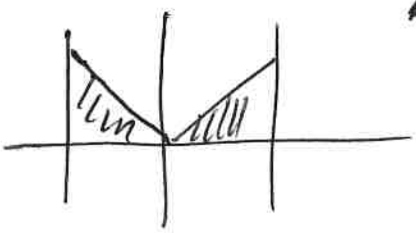
$$E[X] = \int_{-1}^{+1} \underbrace{|x|\,x}_{\text{fonction impaire}}\, dx = \boxed{0}$$ car $|x|\,x$ est une fonction impaire

$$E[X^2] = \int_{-1}^{+1} \underbrace{|x|\,x^2}_{\text{fonction paire}}\, dx = 2\int_0^1 x^3\, dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

donc $\boxed{\operatorname{Var} X = \frac{1}{2}}$

6) Comme $E[X]=0$ on a $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY)$

$$E[XY] = \iint_\Delta xy\, p(x,y)\, dx\,dy = \iint_\Delta xy\, dx\,dy$$



$$= \int_{-1}^{0} \Big(\underbrace{\int_0^{-x} xy\, dy}_{x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-x}}\Big) dx + \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^{x} xy\, dy}_{x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x}}\Big) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{2}\, dx + \int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \int_{-1}^{+1} \frac{x^3}{2}\, dx = \boxed{0}$$

intégrale d'une fonction impaire

$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = 0}$

On a encore un exemple de couple de variables aléatoires non indépendantes tel que $\operatorname{cov}(X,Y)=0$

7) $\begin{cases} Z = \dfrac{Y}{X} \\ T = X \end{cases} \iff \begin{cases} X = T \\ Y = ZT \end{cases}$ donc le changement de variables est bijectif

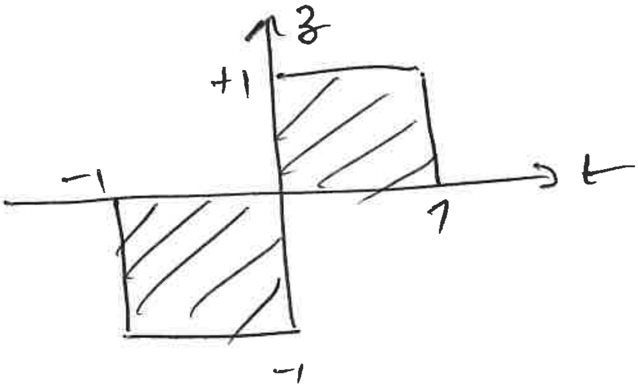
Le Jacobien est

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ t & z \end{vmatrix} = -t$$

donc $\boxed{|J| = |t|}$

Le domaine du couple (Z, T) est défini comme suit

$$\begin{cases} -1 < x < +1 \\ 0 < y < |x| \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < t < 1 \\ 0 < zt < |t| \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < t < 1 \text{ et } 0 < z < 1 \\ -1 < t < 0 \text{ et } -1 < z < 0 \end{cases}$$



Domaine du couple (Z, T)
$\shortparallel$
Domaine haché noté D

La densité du couple (Z, T) est

$$\boxed{\pi(z, t) = |t| \; \mathbb{1}_D(z, t)}$$

Ex3 = Vecteur Gaussien

1- D'après le cours sur les lois marginales d'un vecteur gaussien, on a

$$X_1 \sim N(0,2) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{\Sigma}\right)$$

2- $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ où A est une matrice de rang 2

donc $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\Sigma A^T\right)$

Le calcul de $A\Sigma A^T$ se fait facilement

$$A\Sigma A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 5 & 1-5a \\ 1 & 5-a \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1-5a \\ 1-5a & -a+5a^2+5-a = 5-2a+5a^2 \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien, les variables U et V sont indépendantes si et ssi $cov(U,V) = 0 \iff 5a = 1 \iff \boxed{a = \frac{1}{5}}$

3- Pour $a = \frac{1}{5}$, d'après la question précédente, les variables $V = X_2$ et $W = X_3 - aX_2$ sont indépendantes. Comme $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien, et que $\Sigma = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$, la variable X_1 est indépendante de $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$. On en conclut

que $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ est constitué de 3 variables aléatoires indépendants