Exercice 1

1) Y prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ avec

$$\boxed{\begin{array}{l} P[Y=0] = P[X=0] = \frac{1}{3} \\ P[Y=1] = P[X=\pm 1] = \frac{2}{3} \end{array}}$$

2) Le couple $(Y,Z) = (X^2, X)$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{(1,1),(1,-1),(0,0)\}$ avec

$$\boxed{P[(Y,Z)=(1,1)] = P[(Y,Z)=(1,-1)] = P[(Y,Z)=(0,0)] = \frac{1}{3}}$$

3) $P[(Y,Z)=(0,0)] = \frac{1}{3} \neq P[Y=0]\,P[Z=0] = P(X=0) \times P[X=0] = \frac{1}{9}$

donc <u>les variables aléatoires Y et Z ne sont pas indépendantes</u>

4) $\mathrm{Cov}(Y,Z) = E[YZ] - E[Y]E[Z] = E[X^3] - E[X^2]E[X]$

Mais $E(X) = (-1)\times\frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0$

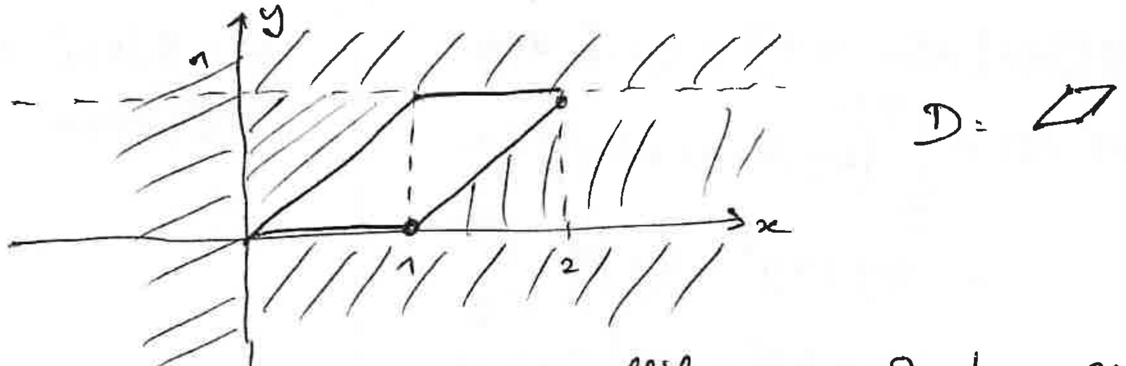
et $E[X^3] = (-1)^3 \times \frac{1}{3} + 0^3 \times \frac{1}{3} + 1^3 \times \frac{1}{3} = 0$

donc $\boxed{\mathrm{cov}(Y,Z) = 0}$

Lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle. Mais la réciproque est fausse. Cet exercice montre qu'il existe des couples de variables aléatoires non indépendantes (ici Y et Z) ayant une covariance nulle.

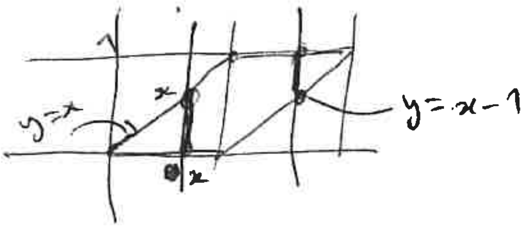
Exercice 2

1) Le domaine de définition du couple (X,Y) est représenté ci-dessous



Il s'agit de l'intérieur d'un parallélogramme. On observe que X est à valeurs dans $]0,2[$ et que Y est à valeurs dans $]0,1[$. Si X et Y étaient indépendantes, le couple (X,Y) serait à valeurs dans le pavé $]0,2[\times]0,1[$, ce qui n'est pas le cas !

Donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont des variables dépendantes}}$

2) 

si $x\in]0,1[$, on voit que $y\in]0,x[$ donc la densité de X est

$$p(x,\cdot)=\int_0^x [4y(1-x)+4y^2]\,dy$$

$$=\left[2y^2(1-x)+\frac{4}{3}y^3\right]_0^x=\boxed{2x^2(1-x)+\frac{4}{3}x^3}$$

si $x\in]1,2[$, on voit que $y\in]x-1,1[$, donc la densité de X est

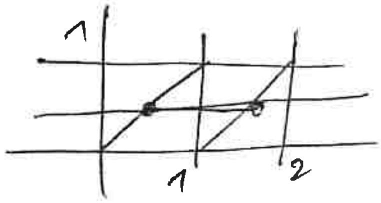
$$p(x,\cdot)=\int_{x-1}^1 [4y(1-x)+4y^2]\,dy$$

$$=\left[2y^2(1-x)+\frac{4}{3}y^3\right]_{x-1}^1$$

$$=\frac{4}{3}-2(x-1)^2(1-x)-\frac{4}{3}(x-1)^3+2(1-x)$$

$$=\boxed{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}(x-1)^3}\boxed{+2(1-x)}$$

Conclusion $\boxed{p(x,\cdot)=\left[2x^2(1-x)+\frac{4}{3}x^2\right]\mathbb{1}_{]0,1[}(x)+\left[\frac{4}{3}+2(1-x)+\frac{2}{3}(x-1)^3\right]\mathbb{1}_{]1,2[}(x)}$

3) 

si $y\in]0,1[$ alors $x\in]y,y+1[$ donc

$$p(\cdot,y)=\int_y^{y+1}[4y(1-x)+4y^2]\,dx$$

$$=4y+4y^2-4y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{y+1}$$

$$=4y+4y^2-2y[2y+1]$$

$$=2y$$

si $y\notin]0,1[$ alors $p(\cdot,y)=0$

donc $\boxed{p(\cdot,y)=2y\,\mathbb{1}_{]0,1[}(y)}$ qui est une loi beta $B(2,1)$

On en déduit $E(Y)=\frac{a}{a+b}=\boxed{\frac{2}{3}}$ ($a=2$, $b=1$) et $\operatorname{var} Y=\frac{2}{9\times 4}=\boxed{\frac{1}{18}}$

4) $\begin{cases} Z = X - Y \\ T = Y \end{cases} \iff \begin{cases} Y = T \\ X = Z + T \end{cases}$

donc le changement de variables est bijectif.

Le Jacobien de la transformation est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

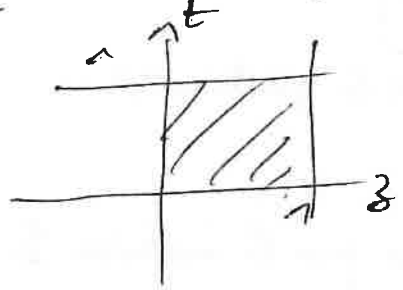
donc la densité de (Z, T) est

$$\pi(z, t) = 4t\,(1 - z - t + t) \quad (z, t) \in \Delta$$

$$\boxed{\pi(z, t) = 4t(1 - z)\,\mathbb{1}_\Delta(z, t)}$$

Le domaine Δ se détermine comme suit

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y < 1 \\ x > y \\ x < y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z + t > 0 \\ t > 0 \\ t < 1 \\ z > 0 \\ t + z < t + 1 \iff z < 1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} 0 < t < 1 \\ \text{et} \\ 0 < z < 1 \end{cases}}$$



c'est le domaine hachuré sur la figure à gauche, i.e., ~~[illegible]~~ le pavé $]0,1[\times]0,1[$

5) La loi marginale de Z est

$$\pi(z, \cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin]0,1[\\ \int_0^1 4t(1 - z)\,dt = 2(1 - z) \end{cases}$$

soit $\boxed{\pi(z, \cdot) = 2(1 - z)\,\mathbb{1}_{]0,1[}(z)}$

qui est la densité d'une loi beta $B(1, 2)$

De même la loi marginale de T est définie sur $]0,1[$ avec

$$\pi(\cdot, t) = \int_0^1 4t(1 - z)\,dz = 4t\left[z - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 2t$$

Donc $\boxed{\pi(\cdot,t) = 2t\,\mathbb{1}_{]0,1[}(t)}$ qui est la densité d'une loi beta $B(2,1)$

On observe que $\pi(z,t) = \pi(z,\cdot)\,\pi(\cdot,t)$ $\forall z\ \forall t$ donc les variables Z et T sont indépendantes

6) $\mathrm{Cov}(Z,T) = E[ZT] - E(Z)\,E(T)$

En remplaçant Z et T par leurs expressions en fonction de X et Y, on obtient

$$\mathrm{cov}(Z,T) = E[(X-Y)Y] - E[X-Y]\,E[Y]$$
$$= E[XY] - E[Y^2] - E[X]E[Y] + E^2[Y]$$

On en déduit

$$\boxed{\mathrm{cov}(Z,T) = \mathrm{cov}(X,Y) - \mathrm{Var}\,Y}$$

Comme Z et T sont indépendantes, on a $\mathrm{cov}(Z,T) = 0$

donc $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{Var}\,Y = \boxed{\frac{1}{18}}$

déterminée à la question 3)

Exercice 3

1) La condition $a \in]-2,+2[$ est nécessaire pour que la matrice Σ soit symétrique définie positive

2) Si on pose $q(v) = -\frac{1}{2}(v-m)^T\Sigma^{-1}(v-m)$, on sait que

$$q'(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial y} \end{bmatrix} = -\Sigma^{-1}(v-m)$$

et $$q''(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \end{bmatrix} = -\Sigma^{-1}$$

Des calculs élémentaires conduisent à

$$-\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & a \\ a & -2 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{bmatrix}$$

On en déduit $\det \Sigma = 4 - a^2$ et $\boxed{\Sigma = \frac{1}{4-a^2} \begin{bmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}}$

De plus $q'(v) = \begin{bmatrix} -2x + ay + 1 \\ -2y + ax + 1 \end{bmatrix} = -\Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x - m_1 \\ y - m_2 \end{pmatrix}$

avec $m_1 = E[X]$ et $m_2 = E[Y]$. On a donc

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x - m_1 \\ y - m_2 \end{pmatrix}} = \begin{bmatrix} 2x - ay - 1 \\ 2y - ax - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x - 2m_1 - ay + am_2 \\ -ax + am_1 + 2y - 2m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - ay - 1 \\ 2y - ax - 1 \end{bmatrix}$$

Par identification $\begin{cases} -2m_1 + am_2 = -1 \\ am_1 - 2m_2 = -1 \end{cases}$

d'où $\boxed{m_1 = m_2 = \frac{1}{2-a}}$

3) Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur Gaussien, X et Y sont indépendantes si et seulement si $\operatorname{cov}(X,Y) = 0 \iff \boxed{a = 0}$

4) Les lois marginales d'un vecteur gaussien sont des lois normales. On a donc

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim N(m_1, \sigma_1^2) = N\left(\frac{1}{2-a}, \frac{2}{4-a^2}\right) \\ \text{et } Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) = N\left(\frac{1}{2-a}, \frac{2}{4-a^2}\right) \end{array}}$$

5) $$P(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(\cdot,y)} = C(y)\, p(x,y)$$

où $C(y)$ est une fonction de y seulement. Mais

$$p(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{x|y}}} \exp\left[-\frac{(x-m_{x|y})^2}{2\sigma^2_{x|y}}\right]$$

Par identification des termes en x dans $\exp(-x^2-y^2+axy+x+y)$ on obtient

$$-x^2+axy+x = -\frac{1}{2\sigma^2_{x|y}}\left(x^2-2m_{x|y}\,x\right)$$

soit $\boxed{\sigma^2_{x|y} = \frac{1}{2}}$ et $1+ay = +2m_{x|y}$

soit $\boxed{m_{x|y} = \frac{1+ay}{2}}$

d'où $\boxed{X|Y=y \sim \mathcal{N}\left(\frac{1+ay}{2}, \frac{1}{2}\right)}$