EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

10 Janvier 2022

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (7 points)

On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ, i.e., $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et une variable aléatoire Y telle que $Y|X = n$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$, i.e., $Y|X = n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que

$$\begin{aligned} P[X = n, Y = k] &= P[Y = k|X = n]P[X = n] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, \quad (k,n) \in \{0, ..., n\} \times \mathbb{N} \\ &= \frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda}, \quad (k,n) \in \{0, ..., n\} \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

   1pt expression, 1pt domaine

2. Montrer que Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.
   On a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P[Y = k] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P[X = n, Y = k] \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \left[\frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda}\right], \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m+k}\right], \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m\right], \\ &= \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

   On reconnait une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$, i.e., $Y \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. 2 pts

3. Montrer que $E[XY] = \frac{1}{2}\lambda(1 + \lambda)$ (on pourra utiliser le théorème des espérances conditionnelles).
   D'après le théorème des espérances conditionnelles

$$E[XY] = E_X\{E_Y[XY|X]\} = E_X\{XE_Y[Y|X]\} = E_X\left\{X \times \frac{X}{2}\right\} = \frac{1}{2}E[X^2].$$

   En effet comme la loi de $Y|X = n$ est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, son espérance est $E_Y[Y|X = n] = \frac{n}{2} = \frac{X}{2}$.
   Comme X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on en déduit

$$E[X^2] = \text{var}[X] + E^2[X] = \lambda + \lambda^2.$$

   d'où

$$E[XY] = \frac{\lambda(1 + \lambda)}{2}.$$

   2 pts

4. Déterminer a tel que la covariance du couple $(X, Z = X + aY)$ soit nulle.
D'après ce qui précède, on a

$$E[X] = \lambda \text{ et } E[Z] = \lambda + a\frac{\lambda}{2} = \lambda\left(1 + \frac{a}{2}\right).$$

de plus

$$E[XZ] = E[X^2] + aE[XY] = \lambda + \lambda^2 + a\left[\frac{\lambda(1+\lambda)}{2}\right].$$

On en déduit

$$\text{cov}(X, Z) = E[XZ] - E[X]E[Z] = \lambda\left[1 + \frac{a}{2}\right].$$

La covariance du couple (X, Z) est donc nulle si et seulement si $a = -2$.1 pts

Exercice 2: Loi du produit de deux variables aléatoires de lois uniformes (7 points)

On considère un couple de variables aléatoires indépendantes (X, Y) telles que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = XY$ et de vérifier quelques propriétés de cette loi.

1. Déterminer la densité du couple (Z, T) avec $Z = XY$ et $T = Y$ en prenant soin de déterminer le domaine de définition du couple.
Le changement de variables est clairement bijectif car

$$\left\{\begin{array}{c} Z = XY \\ T = Y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} X = \frac{Z}{T} \\ Y = T \end{array}\right.$$

Le Jacobien du changement de variables est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{T} & 0 \\ -\frac{Z}{T^2} & 1 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{T}}$$

En utilisant l'indépendance entre les variables X et Y, on obtient facilement la densité du couple (X, Y) :

$$\boxed{p(x, y) = I_{]-1/2,1/2[}(x) \times I_{]0,1[}(y)}$$

où $I_{]-1/2,1/2[}(x)$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $]-1/2, 1/2[$ égale à 1 si $x \in]-1/2, 1/2[$ et 0 sinon. On en déduit la densité du couple (Z, T) :

$$\boxed{g(z, t) = \frac{1}{t} I_\Delta(z, t)}$$

où Δ est le domaine de définition du couple (Z, T) qu'il convient de déterminer.
Le domaine Δ est l'image de $]-1/2, 1/2[\times]0, 1[$ par le changement de variables. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2} < \frac{z}{t} < \frac{1}{2} \\ 0 < t < 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} -\frac{t}{2} < z < \frac{t}{2} \\ 0 < t < 1 \end{array}\right.$$

qui est l'intérieur d'un triangle délimité par les droites $z = \frac{t}{2}$, $z = -\frac{t}{2}$ et $t = 1$.
3 pts

2. Déterminer la loi marginale de $Z = XY$ (on prendra bien soin de déterminer le domaine de définition de la densité de Z).
D'après le domaine du couple (Z, T), la variable aléatoire Z est à valeurs dans $]-1/2, 1/2[$. De plus
$$g(z,.) = \int_{\mathbb{R}} g(z,t)dt = \begin{cases} \int_{2z}^{1} \frac{dt}{t} \text{ si } z \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ \int_{-2z}^{1} \frac{dt}{t} \text{ si } z \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\end{cases}$$
c'est-à-dire
$$g(z,.) = \begin{cases} -\ln(2z) \text{ si } z \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ -\ln(-2z) \text{ si } z \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\end{cases}$$
soit
$$\boxed{g(z,.) = -\ln(2|z|)\ I_{\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[}(z)}$$
2 pts

3. Déterminer la covariance du couple (Z, T) notée $\text{cov}(Z, T)$. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ? Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $\text{cov}(Z, T)$?
En utilisant l'indépendance entre les variables X et Y, on a
$$E[Z] = E[XY] = E[X]E[Y] = 0 \times \frac{1}{2} = 0 \text{ et } E[T] = E[Y] = \frac{1}{2}.$$
de plus
$$E[ZT] = E[XY^2] = E[X]E[Y^2] = 0 \times E[Y^2] = 0.$$
Donc la covariance du couple (Z, T) est nulle. Comme le domaine du définition du couple (Z, T) n'est pas une réunion de pavés, les variables Z et T ne sont pas indépendantes mais on sait bien que deux variables aléatoires peuvent être dépendantes et avoir une covariance nulle.
2 pts

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (6 points)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{V} = (X, Y)^T$ de vecteur moyenne nul et de matrice de covariance
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$
avec $\rho \in]-1, +1[$.

1. Pourquoi doit-on imposer la condition $\rho \in]-1, +1[$ pour que $\boldsymbol{V}$ soit un vecteur gaussien ?
La matrice de covariance d'un vecteur Gaussien doit être symétrique, définie et positive. Les valeurs propres λ de la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ vérifient
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \rho \\ \rho & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \rho^2 = 0 \ \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \rho.$$
Pour que la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ soit définie positive il faut que ses valeurs propres soient strictement positives d'où
$$\rho \in]-1, +1[.$$
1 pts

2. On pose $Z_1 = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $Z_2 = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$. Quelle est la loi du vecteur $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)^T$?
   Le vecteur $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)^T$ s'écrit sous la forme $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$ avec
   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$
   Comme la matrice $\boldsymbol{A}$ est de rang 2 (son déterminant est égal à 1), d'après un résultat du cours, $\boldsymbol{Z}$ est un vecteur Gaussien de vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu_Z} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance
   $$\boldsymbol{\Sigma_Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}.$$
   2pts

3. Déterminer les lois marginales des variables Z_1 et Z_2. Les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes (justifier votre réponse avec soin) ?
   Les lois marginales d'un vecteur Gaussien sont des variables Gaussiennes et il est facile de retrouver leurs moyennes et leurs variances dans $\boldsymbol{\mu_Z}$ et $\boldsymbol{\Sigma_Z}$. On en déduit
   $$Z_1 \sim \mathcal{N}(0, 1+\rho) \text{ et } Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1-\rho).$$
   Comme $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)^T$ est un vecteur Gaussien et que sa covariance est nulle, les variables Z_1 et Z_2 sont indépendantes.
   2pts

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $T = \frac{Z_1^2}{1+\rho} + \frac{Z_2^2}{1-\rho}$.
   On a
   $$T = \left(\frac{Z_1}{\sqrt{1+\rho}}\right)^2 + \left(\frac{Z_2}{\sqrt{1-\rho}}\right)^2 = U_1^2 + U_2^2$$
   avec U_1 et U_2 indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On en déduit que $T \sim \chi_2^2$ (loi du chi deux à deux degrés de liberté).
   1pt

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x > 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x > 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\right]$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x > 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it}+q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : np_jq_j Covariance : $-np_jp_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$