EXAMEN PROBABILITÉS - 1MFEE

Jeudi 17 Novembre 2022 (8h00-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Espérance conditionnelle (6 points) (inspiré d'un exercice de L. Rouvière)

On considère deux variables aléatoires aléatoires discrètes X et Y à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que $P[(X,Y)=(1,0)]=a$, $P[(X,Y)=(0,1)]=2a$ et $P[(X,Y)=(0,0)]=P[(X,Y)=(1,1)]=3a$.

1. Déterminer la valeur de a.
   La somme des probabilités du couple doit être égale à 1, donc
   $$a+2a+3a+3a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{9}.$$

2. Déterminer la loi marginale de Y, sa moyenne $E[Y]$ et sa variance var$[Y]$.
   Y est à variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que
   $$P[Y=0]=P[(X,Y)=(0,0)]+P[(X,Y)=(1,0)]=4a=\frac{4}{9}$$
   et
   $$P[Y=1]=P[(X,Y)=(0,1)]+P[(X,Y)=(1,1)]=5a=\frac{5}{9}.$$
   On a donc
   $$E[Y]=0\times P[Y=0]+1\times P[Y=1]=\frac{5}{9}$$
   et
   $$E[Y^2]=0^2\times P[Y=0]+1^2\times P[Y=1]=\frac{5}{9}$$
   d'où
   $$\text{var}[Y]=E[Y^2]-E[Y]^2=\frac{20}{81}.$$

3. Calculer $E[Y|X=0]$ et $E[Y|X=1]$. En déduire la loi de la variable aléatoire $E[Y|X]$.
   La variable aléatoire $Y|X=0$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ avec
   $$P[Y=0|X=0]=\frac{P[Y=0,X=0]}{P[X=0]}=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5} \text{ et } P[Y=1|X=0]=1-P[Y=0|X=0]=\frac{2}{5}.$$
   donc
   $$E[Y|X=0]=0\times\frac{3}{5}+1\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}.$$
   De même
   $$P[Y=0|X=1]=\frac{P[Y=0,X=1]}{P[X=1]}=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4} \text{ et } P[Y=1|X=1]=1-P[Y=0|X=1]=\frac{3}{4}.$$
   donc
   $$E[Y|X=1]=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$
   $E[Y|X]$ est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{\frac{2}{5},\frac{3}{4}\right\}$ telle que
   $$P\left[E[Y|X]=\frac{2}{5}\right]=P[X=0]=\frac{5}{9} \text{ et } P\left[E[Y|X]=\frac{3}{4}\right]=P[X=1]=\frac{4}{9}.$$

4. Retrouver la valeur de $E[Y]$ à partir de la moyenne de la variable aléatoire $E[Y|X]$ en justifiant ce résultat.
En utilisant le théorème des espérances conditionnelles, on obtient

$$E[Y] = E\left[E[Y|X]\right] = \frac{2}{5} \times P\left[E[Y|X] = \frac{2}{5}\right] + \frac{3}{4} \times P\left[E[Y|X] = \frac{3}{4}\right] = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}.$$

On retrouve le résultat obtenu à la question 2).

Exercice 2: Changement de variables continues (8 **points**)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} 2y \text{ si } y \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X,Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
En utilisant l'indépendance des variables X et Y, on peut déterminer la densité du couple (X,Y)

$$p(x,y) = p(x,.) \times p(.,y) = \begin{cases} y \text{ si } (x,y) \in]-1,1[\times[0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. On définit les deux variables aléatoires $Z = \frac{Y}{X}$ et $T = X$. Quelle est la loi du couple (Z,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
Le changement de variables est clairement bijectif car

$$\begin{cases} Z = \frac{Y}{X} \\ T = X \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = T \\ Y = ZT \end{cases}$$

Le Jacobien du changement de variables est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & T \\ 1 & Z \end{vmatrix} = -T.$$

On en déduit la densité du couple (Z,T) :

$$\boxed{g(z,t) = tz \times |t| I_{\Delta}(z,t)}$$

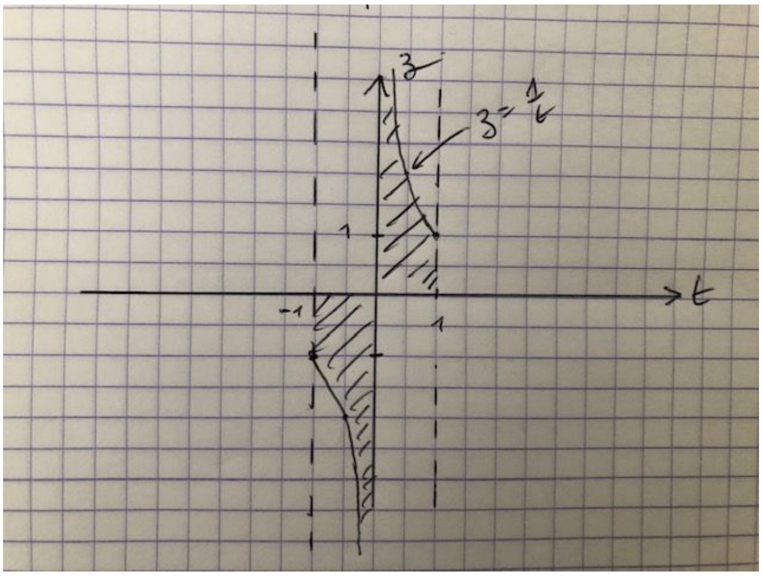
où Δ est le domaine de définition du couple (Z,T) qu'il convient de déterminer. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \\ 0 < zt < 1 \end{cases}$$

et on obtient le domaine suivant

$$\begin{cases} 0 < t < 1 \\ 0 < z < \frac{1}{t} \end{cases} \bigcup \begin{cases} -1 < t < 0 \\ \frac{1}{t} < z < 0 \end{cases}$$

qui est représenté en hachuré ci-dessous



3. Déduire de la question précédente la loi marginale de Z (on pourra vérifier que l'intégrale de cette densité est égale à 1 pour éviter une éventuelle erreur de calcul).
La densité de Z s'obtient par intégration de la densité du couple

$$g(z,.) = \int_{\mathbb{R}} g(z,t)du = \begin{cases} \int_0^1 g(z,t)dt \text{ si } 0 < z < 1 \\ \int_0^{\frac{1}{z}} g(z,t)dt \text{ si } 1 < z \\ \int_{-1}^0 g(z,t)dt \text{ si } \; -1 < z \geq 0 \\ \int_{\frac{1}{z}}^0 g(z,t)dt \text{ si } z < -1 \end{cases}$$

Des calculs élémentaires conduisent à

- $0 < z < 1$
$$g(z,.) = \int_0^1 zt^2 dt = \frac{z}{3}$$
- $z > 1$
$$g(z,.) = \int_0^{\frac{1}{z}} zt^2 dt = \frac{1}{3z^2}$$
- $-1 \leq z < 0$
$$g(z,.) = \int_{-1}^0 -zt^2 dt = -\frac{z}{3}$$
- $z < -1$
$$g(z,.) = \int_{\frac{1}{z}}^0 -zt^2 dt = \frac{1}{3z^2}$$

On remarquera que l'intégrale de cette densité vaut

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{3z^2}dz + \int_{-1}^0 -\frac{z}{3}dz + \int_0^1 \frac{z}{3}dz + \int_1^{+\infty} \frac{1}{3z^2}dz = 2\left[\int_0^1 \frac{z}{3}dz + \int_1^{+\infty} \frac{1}{3z^2}dz\right] = 2\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right] = 1.$$

4. Déterminer la covariance du couple (Z, T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
On a $Z = \frac{Y}{X}$ et $T = X$, donc

$$\text{cov}(Z,T) = E[ZT] - E[Z]E[T] = E[Y] - E\left[\frac{Y}{X}\right] E[X].$$

Comme $E[X]=0$, on a

$$\mathrm{cov}(Z,T)=E[Y]=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}.$$

Comme $\mathrm{cov}(Z,T)\neq 0$, les variables Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (6 **points) (inspiré d'un exercice de D. Pastor et C. Sintes)**

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)^T$ de vecteur moyenne nul et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\rho\in]-1,+1[$.

1. (1pt) On admet que les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ sont $\lambda_1=2+\sqrt{1+3\rho^2}$ et $\lambda_2=2-\sqrt{1+3\rho^2}$. Pourquoi doit-on imposer la condition $\rho\in]-1,+1[$ pour que $\boldsymbol{X}$ soit un vecteur gaussien ?
Pour que $\boldsymbol{X}$ soit un vecteur gaussien (non dégénéré), il faut que $\boldsymbol{\Sigma}$ soit une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que ses valeurs propres soient strictement positives. Comme $\lambda_1>0$ pour tout valeur de ρ, on doit avoir

$$\lambda_2>0\Leftrightarrow 2\geq\sqrt{1+3\rho^2}\Leftrightarrow\rho^2\leq 1\Leftrightarrow\rho\in]-1,+1[.$$

2. (1pt) Déterminer les variances des variables X_1 et X_2 notées $\mathrm{var}(X_1)$ et $\mathrm{var}(X_2)$, et la covariance du vecteur $\boldsymbol{X}$ notée $\mathrm{cov}(X_1,X_2)$. En justifiant proprement votre réponse, indiquer la valeur de ρ pour laquelle les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.
On obtient les variances de X_1 et X_2 et la covariance du couple dans la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\mathrm{var}(X_1)=3,\ \mathrm{var}(X_2)=1 \text{ et } \mathrm{cov}(X_1,X_2)=\rho\sqrt{3}.$$

Comme $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)^T$ est un vecteur gaussien, d'après le cours, les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{cov}(X_1,X_2)=0\Leftrightarrow\rho=0$.

3. (2pt) On pose $Y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}X_1-X_2$ et $Y_2=\frac{1}{\sqrt{3}}X_1+X_2$. Quelle est la loi de $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2)^T$?
Le vecteur $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2)^T$ s'écrit sous la forme $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ avec

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice $\boldsymbol{A}$ est de rang 2 (son déterminant est égal à $2/\sqrt{3}\neq 0$), d'après un résultat du cours, $\boldsymbol{Y}$ est un vecteur Gaussien de vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu_Y}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma_Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(1-\rho) & 0 \\ 0 & 2(1+\rho) \end{pmatrix}$$

donc $\boldsymbol{Y}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_Y},\boldsymbol{\Sigma_Y})$.

4. (2pt) Montrer que la loi conditionnelle de $X_2|X_1 = x_1$ est une loi normale dont on précisera la moyenne et la variance.
On donne

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{3(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\rho\sqrt{3} \\ -\rho\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

La densité de $X_2|X_1 = x_1$ est définie par

$$p(x_2|x_1) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_1, .)}$$

avec

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{x}\right]$$

et

$$p(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

où σ_1^2 est la variance de X_1, soit $\sigma_1^2 = 3$. Comme $\det(\mathbf{\Sigma}) = 3(1-\rho^2)$, des calculs élémentaires conduisent à

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x_1^2 - 2\rho\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2}{3(1-\rho^2)}\right],$$

d'où

$$p(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x_2^2 - 2\rho\frac{\sqrt{3}}{3}x_1x_2 + \frac{x_1^2}{3}}{(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2}{6}\right].$$

Cette expression se simplifie comme suit

$$p(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{\left(x_2 - \frac{\rho\sqrt{3}x_1}{3}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right].$$

On reconnait une loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\rho\sqrt{3}x_1}{3}, 1-\rho^2\right)$.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P\left[X = k\right]$ $p_{1,...,m} = P\left[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m\right]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P\left[X = 1\right] = p$ $p_0 = P\left[X = 0\right] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B\left(n, p\right)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}, , C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1}...p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P\left(\lambda\right)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne $\quad$ σ^2 : variance $\quad$ **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)