EXAMEN PROBABILITÉS - 1MFEE

Lundi 20 Novembre 2023 (8h00-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Loi du minimum de X et $1-X$ (6 points)

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $]0,1[$ de densité de probabilité $p(x)$ et de fonction de répartition $F(x)$. On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, 1-X\}$ et à certaines de ses propriétés.

1. Montrer que la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et que sa densité s'écrit

$$\pi(y) = [p(y) + p(1-y)]\mathbb{I}_{]0,\frac{1}{2}]}(y)$$

où $\mathbb{I}_{]0,\frac{1}{2}]}$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. En déduire la loi de Y lorsque

- X suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$
- X suit une loi beta $B(2,2)$ de densité $p(x) = 6x(1-x)\mathbb{I}_{]0,1[}(x)$

Comme $Y = X$ si $X \leq \frac{1}{2}$ et $Y = 1-X$ si $X \geq \frac{1}{2}$, on a clairement $Y \in]0, \frac{1}{2}]$. Pour déterminer la loi de Y, on peut faire de deux manières

(a) On peut déterminer la fonction de répartition de Y définir par $P[Y < t]$. Comme $Y \in]0, \frac{1}{2}[$, on a

$$P[Y < t] = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

De plus, pour $t \in]0, 1/2[$, on a

$$\begin{aligned} P[Y < t] &= P[X \leq \frac{1}{2} \text{ et } X < t] + P[X \geq \frac{1}{2} \text{ et } 1-X < t] & (1) \\ &= P[X < t] + P[X \in]1-t, 1[& (2) \\ &= F(t) + F(1) - F(1-t) & (3) \\ &= F(t) - F(1-t). & (4) \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient la densité de Y

$$\pi(y) = [p(y) + p(1-y)]\mathbb{I}_{]0,\frac{1}{2}[}(y).$$

(b) Une autre manière de procéder est de remarquer que le changement de variables $Y = \min\{X, 1-X\}$ est bijectif par morceaux. On a une première bijection π_1 de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et la seconde de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. La première bijection est telle que $Y = X$, a pour Jacobien $J_1 = \left|\frac{dx}{dy}\right| = 1$ et conduit à la densité $\pi_1(y) = p(y)$. La seconde bijection est telle que $Y = 1-X$, a pour Jacobien $J_2 = \left|\frac{dx}{dy}\right| = 1$ et conduit à la densité $\pi_2(y) = p(1-y)$. En ajoutant les deux densités, on retrouve le même résultat qu'avec la fonction de répartition.

2. En utilisant la question précédente, déterminer la loi de $Y = \min\{X, 1 - X\}$ lorsque

   - X suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$
   - X suit la loi beta $B(2, 2)$ de densité $p(x) = 6x(1 - x)\mathbb{I}_{]0,1[}(x)$

   La densité d'une loi uniforme sur $]0, 1[$ est $p(x) = \mathbb{I}_{]0,1[}(x) = p(1 - x)$ donc si X suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$, la densité de Y est

   $$\pi(y) = 2\mathbb{I}_{]0,1/2]}(y),$$

   qui est la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1/2]$.
   Si X suit la loi beta $B(2, 2)$ de densité $p(x) = 6x(1 - x)\mathbb{I}_{]0,1[}(x)$, alors comme $p(1 - x) = p(x)$, la densité de Y est

   $$\pi(y) = 12y(1 - y)\mathbb{I}_{]0,1/2]}(y).$$

3. En utilisant l'expression de $\pi(y)$ déterminée à la question 1, montrer que la moyenne de Y s'écrit

   $$E[Y] = \int_0^{\frac{1}{2}} yp(y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - y)p(y)dy. \tag{5}$$

   En déduire $E[Y]$ lorsque X suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et comparer avec la moyenne de la loi trouvée à la question précédente (fournie par les tables de lois).
   La moyenne de Y est

   $$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^{\frac{1}{2}} y\pi(y)dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} yp(y)dy + \int_0^{\frac{1}{2}} yp(1 - y)dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} yp(y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - u)p(u)du. \end{aligned}$$

   Lorsque X suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, on a $p(x) = \mathbb{I}_{]0,1[}(x)$, d'où

   $$E[Y] = \int_0^{\frac{1}{2}} ydy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - u)du = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + [u - u^2/2]_{y=1/2}^{y=1} = \frac{1}{4}.$$

   On a vu à la première question que dans le cas où X suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, Y suit la loi uniforme sur $]0, 1/2]$ dont sa moyenne est $E[Y] = 1/4$, ce qui est cohérent avec le résultat précédent.

Exercice 2: Changement de variables continues (8 **points)**

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur $]1,2[$, c'est-à-dire de densités

$$p(x,.) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in]1,2[\\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad p(.,y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } y \in]1,2[\\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

1. Déterminer la densité du couple (X,Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
   En utilisant l'indépendance des variables X et Y, on peut déterminer la densité du couple (X,Y)

$$p(x,y) = p(x,.) \times p(.,y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } (x,y) \in]1,2[\times]1,2[\\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

2. On définit les deux variables aléatoires $Z = XY$ et $T = Y$. Quelle est la loi du couple (Z,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
   Le changement de variables est clairement bijectif car

$$\left\{ \begin{array}{c} Z = XY \\ T = Y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} Y = T \\ X = \frac{Z}{T} \end{array} \right.$$

   Le Jacobien du changement de variables est

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{T} & 0 \\ -\frac{Z}{T^2} & 1 \end{array} \right| = \frac{1}{T}.$$

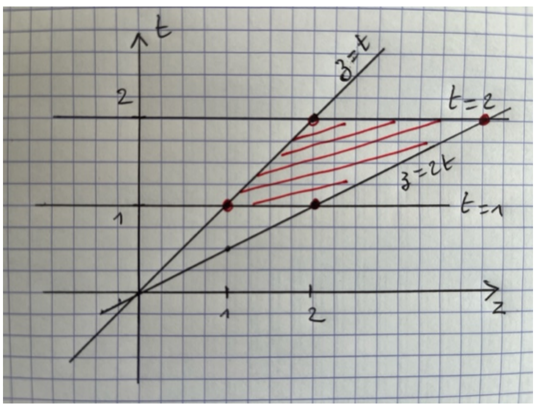
   On en déduit la densité du couple (Z,T) :

$$\boxed{g(z,t) = \frac{1}{t} I_\Delta(z,t)}$$

   où Δ est le domaine de définition du couple (Z,T) qu'il convient de déterminer. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 < x < 2 \\ 1 < y < 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 1 < t < 2 \\ 1 < \frac{z}{t} < 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 1 < t < 2 \\ t < z < 2t \end{array} \right.$$

   qui est représenté en rouge ci-dessous



3. Déterminer la loi marginale de Z. Vérifier que l'intégrale de cette densité est égale à 1 (on rappelle que la primitive de $\ln(t)$ est $t\ln(t) - t$).
On en déduit la loi marginale de Z

$$g(z,.) = \int_{\mathbb{R}} g(z,t)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } z \geq 4 \text{ ou } z \leq 1 \\ \int_1^z \frac{1}{t}dt \text{ si } z \in]1,2[\\ \int_{z/2}^2 \frac{1}{t}dt \text{ si } z \in]2,4[\end{cases}$$

soit

$$g(z,.) = \begin{cases} 0 \text{ si } z \geq 4 \text{ ou } z \leq 1 \\ \ln(z) \text{ si } z \ \in]1,2[\\ \ln(2) - \ln(z/2) = 2\ln(2) - \ln(z) \text{ si } z \in]2,4[\end{cases}$$

On vérifie que

$$\int_1^2 g(z,.)dz + \int_2^4 g(z,.)dz = [z\ln(z) - z]_{z=1}^{z=2} + [2\ln(2) - \ln(z)]_{z=2}^{z=4} = 2\ln(2) - 1 + [-2\ln(2) + 2] = 1.$$

4. Déterminer la covariance du couple (Z,T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
On a

$$\text{cov}(Z,T) = E[ZT] - E[Z]E[T] = E[XY^2] - E[XY]\,E[Y].$$

En utilisant l'indépendance des variables X et Y, on obtient

$$\text{cov}(Z,T) = E[X]E[Y^2] - E[X]E[Y]^2 = E[X] \times \text{var}[Y]$$

Mais, d'après les tables, on a $E[X] = E[Y] = \frac{3}{2}$ et $\text{var}[Y] = \frac{1}{12}$, d'où

$$\text{cov}(Z,T) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{8}.$$

Comme $\text{cov}(Z,T) \neq 0$, les variables Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 : Produit de lois de Rademacher (6 points)

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $X_n, n \in \mathbb{N}$ à valeurs dans $\{-1, +1\}$ telles que $P[X_n = 1] = p = 1 - P[X_n = -1]$ avec $p \in]0, 1[$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la loi de la variable aléatoire $T_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la moyenne et la variance de la variable aléatoire X_n.
   On a
   $$E[X_n] = p \times 1 + (1-p) \times (-1) = 2p - 1.$$
   Mais $E[X_n^2] = E[1] = 1$, donc
   $$\text{var}[X_n] = E[X_n^2] - E^2[X_n] = 1 - (2p-1)^2.$$

2. Quelles sont les valeurs possibles de T_n ? Calculer $E[T_n]$ et en déduire une relation entre $P[T_n = 1]$ et $P[T_n = -1]$.
   Puisque X_k est à valeurs dans $\{-1, +1\}$, on a $T_n \in \{-1, +1\}$. En utilisant l'indépendance entre les variables X_k, on a
   $$E[T_n] = \prod_{k=1}^{n} E[X_k] = (2p-1)^n = P[T_n = 1] - P[T_n = -1].$$

3. Déterminer une autre relation entre $P[T_n = 1]$ et $P[T_n = -1]$ en utilisant le fait que la somme des probabilités d'une variable aléatoire discrète est égale à 1. En déduire la loi de T_n.
   On a $P[T_n = 1] + P[T_n = -1] = 1$, d'où le système
   $$\begin{cases} P[T_n = 1] + P[T_n = -1] = 1 \\ P[T_n = 1] - P[T_n = -1] = (2p-1)^n \end{cases}$$
   qui permet d'obtenir
   $$P[T_n = 1] = \frac{1}{2}\left[1 + (2p-1)^n\right], \text{ et } P[T_n = -1] = \frac{1}{2}\left[1 - (2p-1)^n\right]$$

4. Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire T de loi uniforme dans $\{-1, +1\}$ puis celle de T_n. En déduire que T_n converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
   La fonction caractéristique d'une variable aléatoire T de loi uniforme dans $\{-1, +1\}$ est
   $$E\left[e^{iTt}\right] = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} = \cos(t).$$
   Par ailleurs
   $$E\left[e^{iT_nt}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + (2p-1)^n\right]e^{it} + \frac{1}{2}\left[1 - (2p-1)^n\right]e^{it}$$
   Comme $0 < p < 1$ on a $-1 < 2p - 1 < 1$ donc
   $$\lim_{n \to +\infty} E\left[e^{iT_nt}\right] = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} = \cos(t).$$
   D'après le théorème de Levy, la variable aléatoire T_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme discrète à valeurs dans $\{-1, +1\}$.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES
$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique
$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}, , C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x\rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t\rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)