EXAMEN PROBABILITÉS - 1MFEE

Lundi 18 Novembre 2024 (8h00-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Changement de variables continues (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur $]0,1[$, c'est-à-dire de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X, Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
   En utilisant l'indépendance des variables X et Y, on peut déterminer la densité du couple (X, Y)

$$p(x,y) = p(x,.) \times p(.,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. On définit les deux variables aléatoires $Z = X^2 - Y$ et $T = Y$. Quelle est la loi du couple (Z, T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
   Le changement de variables est clairement bijectif car

$$\begin{cases} Z = X^2 - Y \\ T = Y \end{cases} \iff \begin{cases} Y = T \\ X = \sqrt{Z+T} \end{cases}$$

Le Jacobien du changement de variables est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{Z+T}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{Z+T}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{Z+T}}.$$

On en déduit la densité du couple (Z, T) :

$$\boxed{g(z,t) = \frac{1}{2\sqrt{z+t}} I_\Delta(z,t)}$$

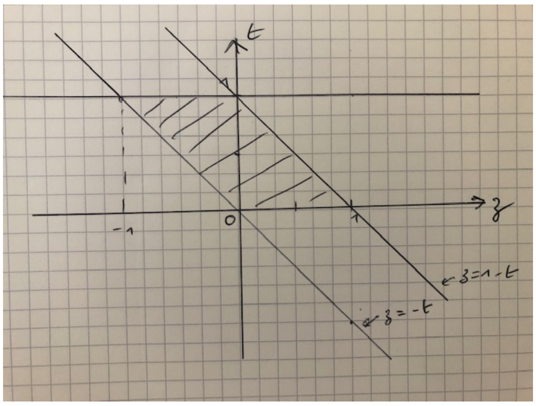
où Δ est le domaine de définition du couple (Z, T) qu'il convient de déterminer. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 < y < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < t < 1 \\ 0 < z+t < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < t < 1 \\ -t < z < 1-t \end{cases}$$

qui est illustré ci-dessous

3. Déterminer la loi marginale de Z.Vérifier que l'intégrale de cette densité est égale à 1 pour éviter une éventuelle erreur de calcul.
   On en déduit la loi marginale de Z

$$g(z,.) = \int_{\mathbb{R}} g(z,t)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } z \geq 1 \text{ ou } z \leq -1 \\ \int_{-z}^{1} \frac{1}{2\sqrt{z+t}} dt \text{ si } z \in]-1,0[\\ \int_{0}^{1-z} \frac{1}{2\sqrt{z+t}} dt \text{ si } z \in]0,1[\end{cases}$$



soit

$$g(z,.) = \begin{cases} 0 \text{ si } z \geq 1 \text{ ou } z \leq -1 \\ \sqrt{z+1} \text{ si } z \in]-1,0[\\ 1-\sqrt{z} \text{ si } z \in]0,1[\end{cases}$$

On vérifie que

$$\int_{-1}^{0} g(z,.)dz + \int_{0}^{1} g(z,.)dz = \int_{-1}^{0} \sqrt{1+z}dz + \int_{0}^{1} [1-\sqrt{z}]dz = \int_{0}^{1} \sqrt{u}du + \int_{0}^{1} 1dz - \int_{0}^{1} \sqrt{z}dz = 1.$$

4. Déterminer la covariance du couple (Z,T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
On a
$$\text{cov}(Z,T) = E[X^2Y - Y^2] - E[(X^2 - Y)]E[Y].$$
En utilisant l'indépendance des variables X et Y, on obtient
$$\text{cov}(Z,T) = E[X^2]E[Y] - E[Y^2] - (E[X^2] - E[Y])E[Y].$$
Mais $E[X] = E[Y] = \frac{1}{2}$ et $E[X^2] = E[Y^2] = \frac{1}{3}$. Donc
$$\text{cov}(Z,T) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}.$$
Comme $\text{cov}(Z,T) \neq 0$, les variables Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 2 : variables aléatoires gaussiennes indépendantes (4 **points)**

On considère trois variables aléatoires indépendantes X, Y et Z de même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

1. (2pts) Quelle est la loi du vecteur $\boldsymbol{V} = (X,Y,Z)^T$ et de la variable $W = 2X - Y + Z + 1$.
Comme les variables aléatoires X, Y et Z sont indépendantes de loi normale, le vecteur $\boldsymbol{V} = (X,Y,Z)^T$ est un vecteur gaussien de moyenne $\boldsymbol{m} = (0,0,0)^T$ et de matrice de covariance
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Comme $W = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + 1$ avec $\boldsymbol{A} = [2 \quad -1 \quad 1]$, cette variable est obtenue par transformée affine de $\boldsymbol{V}$. Le rang de la matrice $\boldsymbol{A}$ étant égal à 1, les résultats du cours permettent de conclure que W est une variable gaussienne de moyenne $\boldsymbol{A}\boldsymbol{m} + 1 = 1$ et de variance $\sigma^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T = 6$.

2. (2pts) Déterminer les valeurs des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que les variables W et $T = aX + bY$ soient indépendantes et que T soit une variable centrée réduite (i.e., de moyenne nulle et de variance égale à 1).
Le vecteur (W, T) s'écrit

$$\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{V} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a = b = 0$, on a $T = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que la variance de T soit égale à 1. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, la matrice $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$\boldsymbol{M\Sigma M}^T = \boldsymbol{MM}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2a - b \\ 2a - b & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien, W et T sont indépendantes si et seulement si $\text{cov}(W, T) = 2a - b = 0$. La variance de T est $\text{var}(T) = a^2 + b^2$. Donc les couples (a, b) tels que W et T soient indépendantes et $\text{var}(T) = 1$ vérifient

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

On a deux couples (a, b) solutions de ce système :

$$(a, b) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \text{ et } (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Exercice 3 : Changement de variables discrètes (8 points)

On considère un couple de variables aléatoires binaires (X, Y) telle que la loi marginale de X est une loi de Bernoulli de paramètre p

$$\begin{aligned} P[X = 1] &= p, \\ P[X = 0] &= 1 - p = q, \end{aligned}$$

avec $p \in]0, 1[$ et dont les lois conditionnelles sont définies comme suit

$$\begin{aligned} P[Y = 1 | X = 1] &= 0 \\ P[Y = 0 | X = 1] &= 1 \\ P[Y = 1 | X = 0] &= \alpha \\ P[Y = 0 | X = 0] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

1. (2pt) Quelle est la loi du couple (X, Y) ? En déduire la loi de Y.
Le couple (X, Y) prend ses valeurs dans l'ensemble $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Les probabilités associées sont

$$\begin{aligned} P[X = 0, Y = 0] &= P[Y = 0 | X = 0] P[X = 0] = (1 - \alpha) q \\ P[X = 1, Y = 0] &= P[Y = 0 | X = 1] P[X = 1] = p \\ P[X = 0, Y = 1] &= P[Y = 1 | X = 0] P[X = 0] = \alpha q \\ P[X = 1, Y = 1] &= P[Y = 1 | X = 1] P[X = 1] = 0 \end{aligned}$$

La loi de Y est définie par

$$\begin{aligned} P[Y=0] &= p+(1-\alpha)q = 1-\alpha q \\ P[Y=1] &= \alpha q \end{aligned}$$

C'est une loi de Bernoulli de paramètre αq.

2. (1pt) Déterminer la covariance du couple (X, Y).
Comme la loi de Y est définie par

$$\begin{aligned} P[Y=0] &= p+(1-\alpha)q = 1-\alpha q \\ P[Y=1] &= \alpha q \end{aligned}$$

on a

$$E[Y] = \alpha q.$$

La covariance du couple (X, Y) est définie par

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Or

$$E[XY] = (0 \times (1-\alpha)q) + (0 \times p) + (0 \times \alpha q) + (1 \times 0) = 0$$

D'où

$$\operatorname{cov}(X,Y) = -\alpha pq$$

3. (2pt) On effectue le changement de variables $U = Y - X$ et $Z = Y + X$. Quelle est la loi du couple (U, Z) ? En déduire les lois marginales de Z et de U.
On effectue le changement de variables $U = Y - X$ et $Z = Y + X$. De manière évidente, on a

	U	Z
$X=1, Y=1$	0	2
$X=1, Y=0$	-1	1
$X=0, Y=1$	1	1
$X=0, Y=0$	0	0

On en déduit

$$\begin{aligned} P[(U,Z)=(0,2)] &= P[X=1, Y=1] = 0 \\ P[(U,Z)=(-1,1)] &= P[X=1, Y=0] = p \\ P[(U,Z)=(1,1)] &= P[X=0, Y=1] = \alpha q \\ P[(U,Z)=(0,0)] &= P[X=0, Y=0] = (1-\alpha)q \end{aligned}$$

Les lois marginales de U et de Z s'en déduisent alors facilement

$$\left\{ \begin{array}{c} P[U=0] = (1-\alpha)q \\ P[U=1] = \alpha q \\ P[U=-1] = p \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} P[Z=0] = (1-\alpha)q \\ P[Z=1] = p + \alpha q \end{array} \right.$$

4. (3pt) On pose $T = Z + W$, où W est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante de Z. Déterminer les lois conditionnelles de $T | Z = 0$ et de $T | Z = 1$. Déterminer $P[T < t]$ et

en déduire la densité de T. Représenter graphiquement cette densité.
Les lois conditionnelles de $T\,|Z=0$ et de $T\,|Z=1$ sont définies par

$$\begin{aligned} T\,|Z=0 &\sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ T\,|Z=1 &\sim \mathcal{N}(1,\sigma^2). \end{aligned}$$

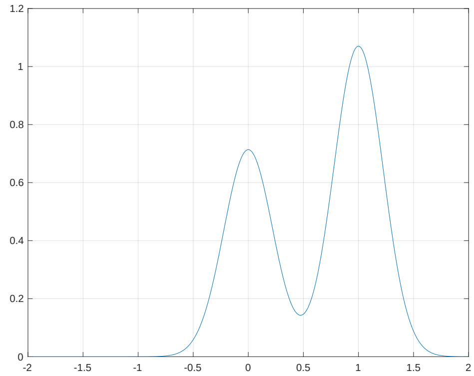
D'après le théorème des probabilités totales, on en déduit

$$P\left[T<t\right] = P\left[T<t\,|Z=0\right]P\left[Z=0\right]+P\left[T<t\,|Z=1\right]P\left[Z=1\right],$$

c'est-à-dire après dérivation

$$f\left(t\right)=\frac{\left(1-\alpha\right)q}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right]+\frac{p+\alpha q}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{\left(t-1\right)^2}{2\sigma^2}\right].$$

On dit qu'on a un mélange de deux gaussiennes dont un exemple de densité est représenté ci-dessous



LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES
$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique
$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}, , C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)