CORRECTION EXAMEN PROBABILITÉS - 1TR

Mercredi 22 Octobre 2014 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Couple de variables aléatoires continues

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité de probabilité

$$p(x,y) = \begin{cases} e^{-y} \text{ si } y \geq x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les densités marginales de X et Y et indiquer les lois obtenues en s'aidant des tables de lois. En déduire les moyennes $E[X], E[Y]$ et les variances $\text{Var}[X], \text{Var}[Y]$.
Réponse : après avoir fait un dessin représentant le domaine de définition du couple (X, Y), on observe que X et Y sont des variables aléatoires continues à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. De plus, pour $x > 0$, la densité de X est définie comme suit

$$p(x,.) = \int_x^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x}.$$

On reconnait une loi gamma $\Gamma(1,1)$ (c'est aussi une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$) telle que $E[X] = \text{Var}[X] = 1$. Pour $y > 0$, la densité de Y est définie par

$$p(.,y) = \int_0^{y} e^{-y} dx = ye^{-y}.$$

On reconnait donc une loi gamma $\Gamma(1,2)$ telle que $E[Y] = \text{Var}[Y] = 2$.

2. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = Y - X$ et $T = X$. En déduire la loi de Z.
Réponse : le changement de variables est clairement bijectif puisque

$$\begin{cases} Z = Y - X \\ T = X \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = T \\ Y = Z + T \end{cases}$$

De plus, le domaine $X \geq 0, Y \geq 0$ se transforme en $T \geq 0, Z + T \geq 0$, c'est-à-dire que le couple (Z, T) prend ses valeurs dans $\Delta = \{(z,t) | t \geq 0, z \geq 0\}$. La matrice Jacobienne de ce changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } |\det(J)| = 1.$$

On en déduit la densité du couple (Z, T)

$$q(z,t) = e^{-z-t} I_{\Delta}(z,t)$$

où I_{Δ} est la fonction indicatrice sur Δ (telle que $I_{\Delta}(z,t) = 1$ si $(z,t) \in \Delta$ et $I_{\Delta}(z,t) = 0$ sinon). Pour déterminer la loi de Z, il suffit d'intégrer cette densité puisque $q(z,.) = \int_{\mathbb{R}} q(z,t)dt$. On obtient le résultat suivant

$$q(z,.) = \int_0^{+\infty} e^{-z-t} dt = e^{-z} \quad \text{si} \quad z > 0$$

c'est-à-dire $q(z,.) = e^{-z} I_{\mathbb{R}^+}(z)$. La variable aléatoire Z suit donc une loi gamma $\Gamma(1,1)$.

3. Déterminer la loi conditionnelle de $X|Y = y$ et $E[X|Y]$. En déduire $E[X]$ en utilisant le théorème des espérances conditionnelles. Vérifier qu'on obtient le même résultat qu'à la première question.
Réponse : la loi conditionnelle de $X|Y = y$ est de densité

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(.,y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} I_{\mathbb{D}}(x,y)$$

avec $D = \{(x,y)|y \geq x \geq 0\}$, c'est-à-dire

$$p(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{y} \text{ si } 0 \leq x \leq y \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit de la loi uniforme sur l'intervalle $]0, y]$. La moyenne de cette loi est

$$E(X|Y = y) = \int_0^y x \frac{1}{y} dx = \frac{y}{2}.$$

En utilisant le théorème des espérances conditionnelles, on obtient

$$E(X) = E[E(X|Y)] = \frac{1}{2} E(Y) = 1.$$

Bien entendu, on retrouve le résultat de la première question.

Exercice 2: Couple de variables aléatoires discrètes

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois de Poisson de paramètres λ et μ, c'est-à-dire telles que

$$P[X = i] = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \ i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P[Y = j] = \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} \ j \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X + Y$ et $T = X$. En déduire la loi de Z ainsi que sa moyenne $E[Z]$ et sa variance Var$[Z]$.
   Réponse : le couple (Z, T) est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ avec
   $$P[Z = m, T = n] = P[X + Y = m, X = n] = P[X = n, Y = m - n].$$
   Cette probabilité est nulle pour $m - n < 0$, c'est-à-dire pour $m < n$. Par contre, pour $m \geq n \geq 0$, on a
   $$P[Z = m, T = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \times \frac{\mu^{m-n}}{(m-n)!} e^{-\mu} = \frac{\lambda^n \mu^{m-n}}{n!(m-n)!} e^{-\lambda-\mu}.$$
   La loi de Z est la loi marginale du couple (Z, T) telle que
   $$P[Z = m] = \sum_{n=0}^{m} \frac{\lambda^n \mu^{m-n}}{n!(m-n)!} e^{-\lambda-\mu} = e^{-\lambda-\mu} \mu^m \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{(m-n)!}.$$
   En utilisant les relations $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ et $(x+y)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n y^{m-n}$, on obtient
   $$P[Z = m] = \frac{1}{m!} e^{-\lambda-\mu} \mu^m \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)^m = \frac{(\lambda+\mu)^m}{m!} e^{-\lambda-\mu}.$$
   Donc Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ avec $E(Z) = \text{Var}[Z] = \lambda + \mu$.

2. Déterminer la fonction caractéristique de Z et retrouver la loi de Z déterminée à la question précédente.
   Réponse : la fonction caractéristique de Z s'écrit
   $$\phi_Z(t) = E\left(e^{itZ}\right) = E\left(e^{itX} e^{itY}\right).$$
   Puisque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on obtient (ceci a été vu en cours)
   $$\phi_Z(t) = E\left(e^{itX}\right) E\left(e^{itY}\right) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$
   En utilisant les tables, obtient la fonction caractéristique d'une loi de Poisson et on en déduit
   $$\phi_Z(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)] \exp[\mu(e^{it} - 1)] = \exp[(\lambda + \mu)(e^{it} - 1)].$$
   On en conclut que Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ et on retrouve le résultat de la question précédente.

3. Déterminer la loi conditionnelle de $Z|T = t$ et $E[Z|T]$. En déduire $E[Z]$ en utilisant le théorème des espérances conditionnelles. Vérifier qu'on obtient le même résultat qu'à la première question.
   Réponse : la loi conditionnelle de $Z|T = t$ est définie par
   $$P[Z = m|T = n] = \frac{P[Z = m, T = n]}{P[T = n]}, \quad m \geq n \geq 0.$$
   On en déduit
   $$P[Z = m|T = n] = \frac{\frac{\lambda^n \mu^{m-n}}{n!(m-n)!} e^{-\lambda-\mu}}{\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}} = \frac{\mu^{m-n}}{(m-n)!} e^{-\mu}, \quad m \geq n \geq 0.$$

et par suite

$$E[Z|T=n] = \sum_{m=n}^{\infty} mP[Z=m|T=n].$$

Le changement de variables $k = m - n$ permet d'obtenir

$$E[Z|T=n] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+n)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = e^{-\mu}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mu^k}{k!} + n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}\right] = e^{-\mu}\left[\mu e^{\mu} + ne^{\mu}\right] = \mu + n.$$

En utilisant le théorème des espérances conditionnelles, on obtient

$$E(Z) = E[E(Z|T)] = E(\mu + T) = \mu + \lambda.$$

Bien entendu, on retrouve le résultat de la première question.

Exercice 3: Approximation de la loi d'une somme de variables binaires

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ (avec $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$) de lois de Bernoulli telles que

$$P[X_i = 1] = p \quad \text{et} \quad P[X_i = 0] = q$$

avec $p + q = 1$.

1. Quelle est la loi de $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$?
   Réponse : C'est la loi du nombre de succès à la suite de n expériences indépendantes de type succès/échec avec $P[\text{succès}] = p$ et $P[\text{échec}] = q$. Il s'agit donc d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ (de moyenne np et de variance npq).

2. Que donne l'application du théorème de la limite centrale à la variable aléatoire Y_n ? En déduire qu'on peut pour n "grand" approcher la loi de Y_n par une loi normale dont on précisera les paramètres. En déduire une expression de $P[Y_n < a]$ à l'aide de la fonction de répartition F d'une loi normale centrée réduite définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

   Réponse : les variables aléatoires X_i étant indépendantes et de même loi de moyenne $m = np$ et de variance $\sigma^2 = npq$, l'application du théorème de la limite centrale nous permet d'obtenir

$$\frac{Y_n - m}{\sigma} = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0, 1).$$

   Pour n "grand", on peut donc approcher la loi de Y_n par une loi normale $\mathcal{N}(np, npq)$. On en déduit

$$P[Y_n < a] = P\left[\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right] = F\left[\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right].$$

Barème

Exercice 1 (8 points)

1. 3 pts (loi de X + loi de Y + tables)
2. 2 pts
3. 3 pts (loi de $X|Y$ avec domaine + $E[X|Y]$ + $E[X]$

Exercice 2 (9 points)

1. 5 pts (loi de (Z,T) + domaine + loi de Z (2pts) + $E[Z]$
2. 1 pt
3. 3pts (loi de $Z|T$ + $E[Z|T]$ + $E[Z]$

Exercice 3 (3 points)

1. 1 pt
2. 1 pt
3. 1 pt