CORRECTION EXAMEN PROBABILITÉS - 1TR

Mercredi 4 Novembre 2015 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Lois uniformes sur $\{0, 1\}$

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur l'ensemble $\{0, 1\}$ vérifiant

$$P[X=0] = P[X=1] = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P[Y=0] = P[Y=1] = \frac{1}{2}$$

et on définit la variable aléatoire $Z = X - Y$.

1. Déterminer $E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$ et $E[Y^2]$. En déduire la moyenne et la variance de la variable aléatoire Z.
   Réponse : on a

   $$E[X] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad E[X^2] = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

   d'où

   $$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

   Par symétrie, on a des résultats identiques pour Y soit

   $$E[Y] = \frac{1}{2}, E[Y^2] = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(Y) = \frac{1}{4}.$$

   On en déduit

   $$E[Z] = E[X] - E[Y] = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}(Z) = E[Z^2] = E[X^2] + E[Y^2] - 2E[X]E[Y] = \frac{1}{2}.$$

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z. Retrouver les valeurs de la moyenne et de la variance de Z déterminées à la question précédente.
   Réponse : la loi du couple (X, Y) est définie par

   $$\begin{aligned} P[(X,Y) = (0,0)] &= \frac{1}{4} \\ P[(X,Y) = (0,1)] &= \frac{1}{4} \\ P[(X,Y) = (1,0)] &= \frac{1}{4} \\ P[(X,Y) = (1,1)] &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   d'où

   $$\begin{aligned} P[Z=0] &= P[(X,Y) = (0,0)] + P[(X,Y) = (1,1)] = \frac{1}{2} \\ P[Z=1] &= P[(X,Y) = (1,0)] = \frac{1}{4} \\ P[Z=-1] &= P[(X,Y) = (0,1)] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On en déduit
$$E[Z] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{4} = 0.$$
De même
$$\text{Var}(Z) = E[Z^2] = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.
Réponse : La fonction de répartition de la variable aléatoire Z est une fonction en escaliers définie par
$$\begin{aligned}
P[Z < z] &= 0 \quad \text{si} \quad z \leq -1 \\
P[Z < z] &= \frac{1}{4} \quad \text{si} \quad -1 < z \leq 0 \\
P[Z < z] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{si} \quad 0 < z \leq 1 \\
P[Z < z] &= 1 \quad \text{si} \quad z > 1.
\end{aligned}$$

4. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire Z que l'on notera $\phi(t) = E[\exp(itZ)]$ et ses deux premières dérivées $\phi'(t)$ et $\phi''(t)$. Retrouver les expressions de la moyenne et de la variance de Z obtenues à la première question de cet exercice à partir de $\phi'(0)$ et de $\phi''(0)$.
Réponse : on a
$$\phi(t) = E[\exp(itZ)] = \exp(-it) \times P[Z = -1] + \exp(0) \times P[Z = 0] + \exp(it) \times P[Z = 1]$$
d'où
$$\phi(t) = \frac{1}{4}\exp(-it) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\exp(it) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t)$$
et
$$\phi'(t) = -\frac{1}{2}\sin(t), \quad \phi''(t) = -\frac{1}{2}\cos(t).$$
Comme nous l'avons vu en cours, on a
$$\phi'(0) = iE[Z] \quad \text{et} \quad \phi''(0) = -E[Z^2].$$
On retrouve donc
$$E[Z] = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}(Z) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2: Première loi de Laplace

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V de lois exponentielles définies par
$$p(u,.) = \begin{cases} e^{-u} \text{ si } u > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,v) = \begin{cases} e^{-v} \text{ si } v > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) avec $X = U - V$ et $Y = V$. En déduire la densité de X. On dira dans la suite de cet exercice que X possède la première loi de Laplace.
Réponse : le changement de variables est clairement bijectif puisque
$$\begin{cases} X = U - V \\ Y = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = X + Y \\ V = Y \end{cases}$$

De plus, le domaine $U \geq 0, V \geq 0$ se transforme en $X+Y \geq 0, Y \geq 0$, c'est-à-dire que le couple (X,Y) prend ses valeurs dans $\Delta = \{(x,y)|y \geq 0, x+y \geq 0\}$. La matrice Jacobienne de ce changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } |\det(J)| = 1.$$

On en déduit la densité du couple (x,y)

$$q(x,y) = e^{-x-2y} I_\Delta(x,y)$$

où I_Δ est la fonction indicatrice sur Δ (telle que $I_\Delta(x,y) = 1$ si $(x,y) \in \Delta$ et $I_\Delta(x,y) = 0$ sinon). Pour déterminer la loi de X, il suffit d'intégrer cette densité puisque $q(x,.) = \int_{\mathbb{R}} q(x,y)dy$. Pour $x < 0$, on obtient

$$q(x,.) = \int_{-x}^{+\infty} e^{-x-2y} dy = \frac{1}{2} e^{x}.$$

De la même façon, pour $x > 0$, on a

$$q(x,.) = \int_{0}^{+\infty} e^{-x-2y} dy = \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Finalement, la densité de X est

$$q(x,.) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. En utilisant les tables de lois, donner les fonctions caractéristiques des variables aléatoires U et V. En remarquant que $X = U - V$, en déduire la fonction caractéristique de X, c'est-à-dire la fonction caractéristique d'une première loi de Laplace. Vérifier que cette expression coincide avec celle donnée dans les tables de lois.
Réponse : la variable U suite une loi gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$ de paramètres $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Donc, d'après les tables, sa fonction caractéristique est

$$\phi_U(t) = E[e^{itU}] = \frac{1}{1-it}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il en est de même pour V, d'où

$$\phi_V(t) = E[e^{itV}] = \frac{1}{1-it}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit en utilisant l'indépendance entre les variables U et V

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = E[e^{itU}]E[e^{-itV}] = \frac{1}{1-it}\frac{1}{1+it} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On retrouve bien l'expression de la fonction caractéristique d'une loi de Laplace donnée dans les tables de lois.

3. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $W_{12} = Z_1 Z_2$ où Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ (on pourra par exemple utiliser le théorème des espérances conditionnelles). En déduire la fonction caractéristique de la variable aléatoire $W = W_{12} + W_{34} = Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$ où Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sont quatre variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la loi de W ?
Réponse : le théorème des espérances conditionnelles permet d'obtenir le résultat suivant

$$\phi_{W_{12}}(t) = E[e^{itW_{12}}] = E[e^{itZ_1 Z_2}] = E\left[E\left[e^{itZ_1 Z_2}|Z_1\right]\right].$$

En utilisant l'expression de la fonction caractéristique d'une loi normale (donnée dans les tables), on obtient

$$\phi_{W_{12}}(t) = E\left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}Z_1^2\right)\right] = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}u^2(t^2+1)\right] du.$$

Un changement de variables permet alors d'obtenir

$$\phi_{W_{12}}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

On obtient le même résultat pour la variable W_{34}. En utilisant l'indépendance entre les variables Z_i pour $i = 1, ..., 4$, on obtient

$$\phi_W(t) = \phi_{W_{12}}(t)\phi_{W_{34}}(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi de Laplace. Donc W suit une loi de Laplace.

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens

Dans cet exercice, les lettres majuscules en gras sont associées à des matrices tandis que les lettres minuscules en gras indiquent des vecteurs. On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{v} = (X, Y)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m_v} = (0, 0)^T$ et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma_v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on cherche à construire à partir de ce vecteur $\boldsymbol{v}$ un autre vecteur $\boldsymbol{w}$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m_w} = (1, 2)^T$ et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma_w} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

avec $|r| < 1$ (on admettra que les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\Sigma_w}$ sont $\lambda_1 = 1 - r$ et $\lambda_2 = 1 + r$). Pour ce, on considère la transformation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Av} + \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{A}$ est une matrice de taille 2×2 et $\boldsymbol{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la condition $|r| < 1$ doit être vérifiée.
   Réponse : La matrice $\boldsymbol{\Sigma_w}$ doit être symétrique définie positive, ce qui revient à démontrer que ses valeurs propres sont toutes les deux strictement positives. Puisque $\lambda_1 = 1 - r$ et $\lambda_2 = 1 + r$, on obtient la condition $|r| < 1$.

2. En utilisant la relation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Av} + \boldsymbol{b}$, déterminer $E[\boldsymbol{w}]$ et en déduire le vecteur $\boldsymbol{b}$ recherché.
   Réponse : On a
   $$E[\boldsymbol{w}] = E[\boldsymbol{Av} + \boldsymbol{b}] = AE[\boldsymbol{v}] + \boldsymbol{b}.$$
   Puisque $E[\boldsymbol{v}] = (0, 0)^T$, on en déduit
   $$E[\boldsymbol{w}] = \boldsymbol{b} = (1, 2)^T.$$
   Donc $\boldsymbol{b} = (1, 2)^T$.

3. En utilisant la relation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Av} + \boldsymbol{b}$, déterminer la matrice de covariance de $\boldsymbol{w}$ en fonction de la matrice $\boldsymbol{A}$. En écrivant la matrice $\boldsymbol{A}$ sous la forme
   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$
   déterminer des réels a, b et c répondant au problème posé.
   Réponse : d'après les résultats du cours, la matrice de covariance de $\boldsymbol{w}$ s'écrit
   $$\boldsymbol{\Sigma_w} = \boldsymbol{A\Sigma_v A}^T = \boldsymbol{AA}^T$$

puisque $\boldsymbol{\Sigma_v}$ est la matrice identité. En remplaçant $\boldsymbol{A}$ par son expression, on obtient

$$\boldsymbol{\Sigma_w} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

Après identification avec la matrice recherchée, on en déduit

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ bc = r \\ c^2 = 1. \end{cases}$$

On peut donc par exemple choisir

$$\begin{cases} a = \sqrt{1 - r^2} \\ b = r \\ c = 1. \end{cases}$$

4. Quelle sont les lois des variables aléatoires $T = 2X + Y + 3$ et $U = X^2 + Y^2$?
Réponse : T est obtenue par transformation affine du vecteur $(X, Y)^T$ à l'aide de la matrice $\boldsymbol{M} = [2\ ,\ 1]$. Puisque cette matrice est de rang 1, T suit une loi normale de moyenne $E[T] = 2E[X] + E[Y] + 3 = 3$ et de variance $\text{Var}(T) = \boldsymbol{M\Sigma_v M}^T = 5$.
D'après un résultat du cours, U suit une loi du khi deux à deux degrés de liberté.