CORRECTION EXAMEN PROBABILITÉS - 1TR

Mercredi 19 Octobre 2016 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Minimum de deux lois de Pascal

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois de Pascal de paramètre p définies sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$P[X=k]=P[Y=k]=p(1-p)^{k-1}, \quad k\geq 1$$

et on définit la variable aléatoire $Z=\min\{X,Y\}$.

1. Déterminer le domaine Δ des valeurs possibles de la variable aléatoire Z et les couples (X,Y) correspondant à $Z=z$ avec $z\in\Delta$. En déduire que Z suit une loi de Pascal dont on précisera le paramètre.
   Réponse : Z est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (comme les variables aléatoires X et Y). Les couples (X,Y) vérifiant $Z=z$ sont (z,z), $(z,z+t)$ avec $t\geq 1$ et $(z+t,z)$ avec $t\geq 1$. On en déduit

   $$P[Z=z]=P[(X,Y)=(z,z)]+\sum_{t\geq 1}P[(X,Y)=(z,z+t)]+\sum_{t\geq 1}P[(X,Y)=(z+t,z)].$$

   Des calculs élémentaires conduisent au résultat suivant

   $$\begin{aligned}
   P[Z=z] &= p^2(1-p)^{2(z-1)}+2\sum_{z=1}^{\infty}p(1-p)^{z-1}\times p(1-p)^{z+t-1}\\
   &= p^2(1-p)^{2(z-1)}+2p^2(1-p)^{2(z-1)}\sum_{t=1}^{\infty}(1-p)^t\\
   &= (1-p)^{2(z-1)}\left[p^2+2p^2\times\frac{1-p}{p}\right]\\
   &= p(2-p)\left[1-p(2-p)\right]^{z-1}, \quad z\geq 1.
   \end{aligned}$$

   On reconnait une loi de Pascal de paramètre $p(2-p)$.

2. On considère la variable aléatoire $T=|X-Y|$. Déterminer $P[Z=z,T=0]$ pour $z\in\Delta$.
   Réponse : L'événement $T=0$ correspond à $X=Y$, donc

   $$P[Z=z,T=0]=P[X=Y=z]=P[X=z]P[Y=z]=p^2(1-p)^{2(z-1)}.$$

3. Montrer que pour $t\geq 1$ et $z\in\Delta$, on a

   $$P[Z=z,T=t]=2p^2(1-p)^{2z+t-2}.$$

   Réponse : L'événement $T=t$ correspond à $X=Y+t$ ou à $X=Y-t$, donc

   $$\begin{aligned}
   P[Z=z,T=t] &= P[X=z,Y=z+t]+P[X=z+t,Y=z]\\
   &= 2p(1-p)^{z-1}\times p(1-p)^{z+t-1}\\
   &= 2p^2(1-p)^{2z+t-2}.
   \end{aligned}$$

4. Déduire de la question précédente les lois marginales de Z et T. Vérifier qu'on retrouve la loi de Z obtenue à la première question de cet exercice.
   Réponse : La loi de T est définie par

$$P[T = t] = \sum_{z \in \Delta} P[Z = z, T = t].$$

   Pour $t = 0$, on obtient

$$P[T = 0] = \sum_{z \in \Delta} P[Z = z, T = 0] = \sum_{z=1}^{\infty} p^2(1-p)^{2(z-1)} = \frac{2}{2-p}$$

   tandis que pour $t \geq 1$, on a

$$P[T = t] = \sum_{z \in \Delta} P[Z = z, T = t] = \sum_{z=1}^{\infty} 2p^2(1-p)^{2z+t-2} = \frac{2p}{2-p}(1-p)^t.$$

   La loi de Z est définie par

$$P[Z = z] = P[Z = z, T = 0] + \sum_{t=1}^{\infty} P[Z = z, T = 1].$$

   Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} P[Z = z] &= p^2(1-p)^{2z-2} + \sum_{t=1}^{\infty} 2p^2(1-p)^{2z+t-2} \\ &= (1-p)^{2z-2} \times [p^2 + 2p^2 \sum_{t=1}^{\infty} (1-p)^t] \\ &= (1-p)^{2z-2} \left[p^2 + 2p^2 \frac{1-p}{p} \right] \\ &= p(2-p) \left[1 - p(2-p)\right]^{z-1}, \quad z \geq 1. \end{aligned}$$

   On retrouve bien la loi de Z obtenue à la première question de cet exercice.

5. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
   Réponse : On vérifie que

$$P[Z = z, T = t] = P[Z = z]P[T = t], \quad \forall z \forall t$$

   donc les variables aléatoires Z et T sont indépendantes.

Exercice 2 : Rapport de deux lois gamma

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V de lois gamma définies par

$$p(u,.) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(p)} u^{p-1} e^{-u} \text{ si } u > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad p(.,v) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(q)} v^{q-1} e^{-v} \text{ si } v > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

où p et q sont deux réels appartenant à l'intervalle $]2, +\infty[$ et $\Gamma(x)$ est la fonction gamma telle que

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty u^n e^{-u} du = n! \text{ si } n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $T = 1/V$ et reconnaitre cette loi dans le tableau de lois. En déduire la moyenne et la variance de T ainsi que $E[T^2]$. Déterminer la moyenne et la variance de la variable aléatoire $X = \frac{U}{V}$.
   Réponse : le changement de variables est clairement bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ car
$$T = \frac{1}{V} \Leftrightarrow V = \frac{1}{T}.$$
   Le Jacobien de cette transformation est
$$|J| = \left| \frac{dV}{dT} \right| = \left| \frac{-1}{T^2} \right| = \frac{1}{T^2}.$$
   La densité de la variable aléatoire T est donc
$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{1}{t^{q+1}} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) I_{]0,\infty[}(t)$$
   où $I_{]0,\infty[}$ est la fonction indicatrice $]0, \infty[$. C'est une loi inverse gamma de paramètres $\theta = 1$ et $\nu = q$. Le tableau de lois permet d'obtenir
$$E[T] = \frac{1}{q-1} \quad \text{et} \quad \text{var}[T] = \frac{1}{(q-1)^2(q-2)}.$$
   On en déduit
$$E[T^2] = \text{var}[T] + E^2[T] = \frac{1}{(q-1)(q-2)}.$$
   En utilisant l'indépendance entre les variables aléatoires X et Y, on obtient
$$E[X] = E\left[\frac{U}{V}\right] = E\left[U\right] E\left[\frac{1}{V}\right] = E[U]E[T] = \frac{p}{q-1}$$
   En utilisant la relation $E[U^2] = \text{Var}(U) + E^2[U] = p + p^2$ (voir tables), on obtient
$$\text{var}[X] = E\left[X^2\right] - E^2[X] = E[U^2]E\left[T^2\right] - \frac{p^2}{(q-1)^2} = \frac{p^2 + pq - p}{(q-1)^2(q-2)}.$$

2. On considère la variable aléatoire $Y = U - V$. Déterminer la loi du couple (X, Y) (on prendra soin de montrer que ce couple est défini sur le domaine $]1, +\infty[\times]0, +\infty[\cup]0, 1[\times] - \infty, 0[$). En déduire la loi marginale de la variable aléatoire X.
   Réponse : le changement de variables est clairement bijectif puisque
$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{U}{V} \\ Y = U - V \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{XY}{X-1} \\ V = \frac{Y}{X-1} \end{array} \right.$$

De plus, le domaine $U > 0, V > 0$ se transforme en $\frac{XY}{Y-1} > 0, \frac{Y}{X-1} > 0$, c'est-à-dire en $X > 0, \frac{Y}{X-1} > 0$. Il y a donc deux domaines suivant le signe de $X-1$: si $X-1 > 0$, on obtient $X > 1, Y > 0$ tandis que si $X-1 < 0$, on a $0 < X < 1, Y < 0$. Le couple est donc bien défini sur le domaine $\Delta =]1, +\infty[\times]0, +\infty[\cup]0, 1[\times] - \infty, 0[$. La matrice Jacobienne de ce changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x-1)^2} & -\frac{y}{(x-1)^2} \\ \frac{x}{x-1} & \frac{1}{x-1} \end{pmatrix} \text{ avec } |\det(J)| = \frac{|y|}{(x-1)^2}.$$

On en déduit la densité du couple (x, y)

$$q(x,y) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \exp\left[-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)y\right] \frac{x^{p-1}y^{p+q-2}|y|}{(x-1)^{p+q}} I_\Delta(x,y)$$

où I_Δ est la fonction indicatrice sur Δ (telle que $I_\Delta(x,y) = 1$ si $(x,y) \in \Delta$ et $I_\Delta(x,y) = 0$ sinon). Pour déterminer la loi de X, il suffit d'intégrer cette densité puisque $q(x,.) = \int_{\mathbb{R}} q(x,y)dy$. Pour $x > 1$, on obtient (après avoir fait le changement de variables $t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right) y$ et avoir utilisé la fonction $\Gamma(p+q)$)

$$q(x,.) = \int_0^{+\infty} q(x,y)dy = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}}, \quad x > 1.$$

De la même façon, pour $0 < x < 1$, on a (après avoir fait le changement de variables $t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right) y$ et avoir utilisé la fonction $\Gamma(p+q)$)

$$q(x,.) = \int_{-\infty}^0 q(x,y)dy = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}}, \quad 0 < x < 1.$$

Finalement, la densité de X est

$$q(x,.) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}} I_{\mathbb{R}^+}(x).$$

3. Montrer que la variable aléatoire $Z = \frac{X}{X+1}$ admet une loi beta dont on déterminera les paramètres. Déterminer $\mu_1 = E\left[\frac{Z}{1-Z}\right]$ et $\mu_2 = E\left[\left(\frac{Z}{1-Z}\right)^2\right]$. En utilisant ces expressions de μ_1 et μ_2, retrouver les expressions de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire X déterminées à la première question de cet exercice.
Réponse : le changement de variables $Z = \frac{X}{X+1}$ est bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $]0, 1[$ avec

$$Z = \frac{X}{X+1} \Leftrightarrow X = \frac{Z}{Z-1}.$$

Le Jacobien de cette transformation est

$$|J| = \left|\frac{dX}{dZ}\right| = \frac{1}{(1-Z)^2}.$$

La densité de la variable aléatoire Z est donc

$$\pi(z) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} z^{p-1}(1-z)^{q-1} I_{]0,1[}(z)$$

qui est une loi beta de paramètres $a = p$ et $b = q$. Les deux moments $\mu_1 = E\left[\frac{Z}{1-Z}\right]$ et $\mu_2 = E\left[\left(\frac{Z}{1-Z}\right)^2\right]$ se déterminent comme suit

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \int_0^1 \left(\frac{z}{1-z}\right) \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} z^{p-1}(1-z)^{q-1} dz \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 z^p (1-z)^{q-2} dz \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q-1)}{\Gamma(p+q)} \\
&= \frac{p}{q-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \int_0^1 \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} z^{p-1}(1-z)^{q-1} dz \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 z^{p+1} (1-z)^{q-3} dz \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q-2)}{\Gamma(p+q)} \\
&= \frac{p(p+1)}{(q-2)(q-1)}
\end{aligned}$$

d'où

$$E[X] = \mu_1 = E\left[\frac{Z}{Z-1}\right] = \frac{p}{q-1}$$

et

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{p^2 + pq - p}{(q-2)(q-1)^2}.$$

On retrouve les expressions de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire X déterminées à la première question de cet exercice.

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (2 **points)**

Déterminer la moyenne et la variance de $Y = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{X}$ (en fonction de $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$) lorsque $\boldsymbol{a}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}^T$ est le vecteur transposé de $\boldsymbol{a}$ et $X = (X_1, ..., X_n)^T$ est un vecteur Gaussien de moyenne $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ de taille $n \times n$.
Réponse : Comme $\boldsymbol{a}$ est un vecteur non nul, d'après le cours, la variable aléatoire Y est gaussienne (la matrice $\boldsymbol{a}^T = [a_1, ..., a_n]$ est de rang 1). La moyenne est la variance de Y se déterminent comme suit

$$E[Y] = E[\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{X}] = \boldsymbol{a}^T E[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{m}$$

et

$$\text{var}[Y] = E[(Y - E[Y])^2] = E[\boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{m})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{m})^T \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T \Sigma \boldsymbol{a}.$$

Barème (27 points)

Exercice 1 (11 points)

1) $\Delta = \mathbb{N}^*$: 1pt

$P[Z=z] = p(2-p)[1-p(2-p)]^{z-1}$: 2pts

Loi de Pascal $\mathcal{P}(p(2-p))$: 1 pt

2) $P[Z=z, T=0] = p^2(1-p)^{2(z-1)}$: 1pt

3) $P[Z=z, T=t] = 2p^2(1-p)^{2z+t-2}$: 1pt

4) $P[T=0] = 2/(1-p)$: 1pt

$P[T=t] = \frac{2p}{2-p}(1-p)^t,\ t \geq 1$: 1pt

$P[Z=z] = p(2-p)[1-p(2-p)]^{z-1},\ z \geq 1$: 2pts

5) Z et T indépendantes : 1pt

Exercice 2 (14 points)

1) changement de variables

$E[T], E[T^2], \text{Var}[T]$: 1pt

$E[X], \text{Var}[X]$: 1pt

2) changement de variables

$U = \frac{XY}{X-1}, V = \frac{Y}{X-1}$: 1pt

Domaine : 1pt

Jacobien : $|J| = \frac{|y|}{(x-1)^2}$: 1pt

densité : $q(x,y)$: 1pt

Loi marginale : $q(x,.)$: 2pts

3) changement de variables

$X = \frac{Z}{Z-1}$: 0.5pt

Jacobien : 0.5pt

Densité : 0.5 pt

Loi beta $B(p,q)$: 0.5pt

Calcul de μ_1 : 2pts

Calcul de μ_2 : 2pts

Exercice 3 (2 points)

$E[Y]$: 1pt

$\text{Var}[Y]$: 1pt