EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

15 Novembre 2018 (14h-15h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Égalisation d'histogramme (7 points)

1. On considère une variable aléatoire continue X définie sur l'intervalle $]0, T[$ ($T > 0$) de densité

$$p(x, .) = \begin{cases} Ke^{-ax} \text{ si } x \in]0, T[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{1}$$

où $K > 0$ est une constante.

- Déterminer la valeur de K pour que p soit une densité de probabilité.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$Y = \frac{KT}{a} [1 - \exp(-aX)] . \tag{2}$$

2. De manière plus générale, on considère une variable aléatoire continue X définie sur l'intervalle $]0, T[$ ($T > 0$) de densité $p(x)$ et de fonction de répartition strictement croissante. On considère la variable aléatoire Y définie par

$$Y = T \int_0^X p(u)du.$$

- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0, T[$.
- Montrer que dans le cas où X possède la loi définie par (1), la variable aléatoire Y est définie comme dans (2).

Exercice 2: Changement de variables (9 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois exponentielles de paramètre 1 (notées $X \sim \mathcal{E}(1)$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$) définies par

$$p(x, .) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(., y) = \begin{cases} e^{-y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple (Z, T) lorsque $Z = X + Y$ et $T = X - Y$. En déduire les lois marginales de Z et T, leurs moyennes $E[Z]$ et $E[T]$ et leurs variances $\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(Y)$.
2. Déterminer la covariance du couple (Z, T).
3. Déterminer la fonction caractéristique de Z. En utilisant les tables, retrouver la loi de Z déterminée à la première question.

Exercice 3: Médiane (5 points)

On considère une variable aléatoire réelle X de fonction de répartition notée F continue et strictement croissante et on appelle médiane de X le nombre m tel que $F(m) = 1/2$.

1. Déterminer la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre a notée $\mathcal{E}(a)$ de densité

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   En déduire la médiane de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

2. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ de même loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ et on définit la suite de variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$ de la manière suivante

$$Y_i = 1 \text{ si } X_i > m$$
$$Y_i = 0 \text{ sinon}$$

   où m est la médiane de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

   - Déterminer la loi de Y_i, sa moyenne et sa variance
   - En déduire la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   - En utilisant le théorème de la limite centrale, montrer que la loi de S_n peut s'approcher pour n grand par une loi normale dont on précisera les paramètres.

Exercice 1

1) a) $\int_0^T k e^{-ax} dx = 1 = \frac{k}{-a} \left[e^{-ax} \right]_0^T \Rightarrow \boxed{k = \frac{a}{1 - e^{-aT}}}$

1pt

b) $Y = \frac{kT}{a}(1 - e^{-aX}) \Leftrightarrow X = -\frac{1}{a} \ln\left(1 - \frac{aY}{kT}\right)$

donc le changement de variables est bijectif

$X = 0 \Rightarrow Y = 0$

$X = T \Rightarrow Y = \frac{kT}{a}\left(1 - e^{-aT}\right) = T$

donc le changement de variables est bijectif de $]0,T[$ dans $]0,T[$ 1pt

Jacobien $\left|\frac{dX}{dY}\right| = \left| -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{1 - \frac{aY}{kT}}\right)\left(\frac{-a}{kT}\right)\right| = \frac{1}{|kT - aY|}$ 1pt

Densité de Y $\quad \pi(y) = k \exp\left[-a \left(-\frac{1}{a}\right) \ln\left(1 - \frac{aY}{kT}\right)\right] \left|\frac{1}{kT - aY}\right|$

$= \frac{a}{(1 - e^{-aT})} \left(1 - \frac{aY}{kT}\right) \frac{1}{|kT - aY|}$

$= \frac{a}{(1 - e^{-aT})} \frac{kT - aY}{kT} \frac{1}{|kT - aY|}$

$= \frac{1}{T} \frac{kT - aY}{|kT - aY|} \qquad y \in]0,T[$

$y \in]0,T[\Rightarrow kT - ay > 0$ donc $\boxed{\pi(y) = \frac{1}{T} \mathbb{1}_{]0,T[}(y)}$

Y suit donc la loi uniforme sur l'intervalle $]0,T[$ 1pt

2) Soit $t \in]0,T[$

$P[Y < t] = P\left[T \int_0^X p(u) du < t\right] = P\left[\int_0^X p(u) du < \frac{t}{T}\right]$

donc $P(Y < t) = P\left(F(X) < \frac{t}{T}\right] = P\left[X < F^{-1}\left(\frac{t}{T}\right)\right)$ 1pt

$F \nearrow$ donc inversible

d'où $P(Y < t] = F\left[F^{-1}\left(\frac{t}{T}\right)\right) = \frac{t}{T}$

Puisque $X \in]0,T[$, $Y \in]0,T[$ donc $P(Y < t] = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > T \end{cases}$ 1pt

On en conclut que la densité de Y est

$$\pi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]0,T[\\ \frac{1}{T} & \text{si } t \in]0,T[\end{cases}$$

donc Y suit la loi uniforme sur $]0,T[$

• $$\int_0^x p(u)du = \int_0^x K e^{-au} du = \frac{K}{-a}\left[e^{-ax}-1\right] = \frac{1-e^{-ax}}{a} \times \underbrace{\frac{a}{1-e^{-aT}}}_{K}$$

donc $$\int_0^x p(u)du = \frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-aT}} = \frac{K}{a}\left(1-e^{-ax}\right)$$

d'où $$Y = T\int_0^X p(u)du = \boxed{\frac{TK}{a}\left(1-e^{-aX}\right)}$$ 1pt

on retrouve bien (2)

Exercice 2

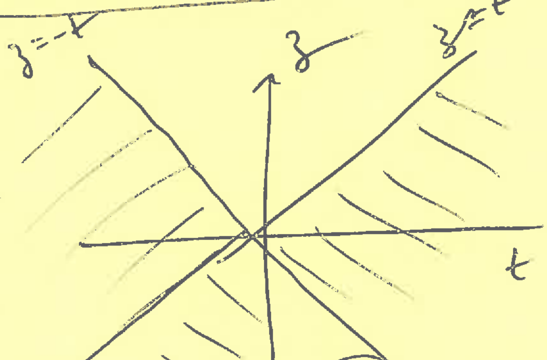
1) $\begin{cases} Z = X+Y \\ T = X-Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = \frac{1}{2}(Z+T) \\ Y = \frac{1}{2}(Z-T) \end{cases}$ 1pt

Le changement de variables est donc bijectif de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans Δ

Domaine Δ : il est défini par

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \iff \begin{cases} z+t>0 \\ z-t>0 \end{cases} \iff \begin{cases} z>t \\ z>-t \end{cases}$$

domaine qui correspond au cone non hachuré



1pt

Jacobien

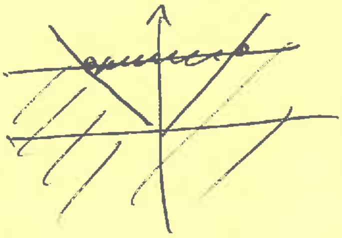
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$ donc $|J| = \frac{1}{2}$ 1pt

Densité

$$g(z,t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(z+t)-\frac{1}{2}(z-t)} \quad (z,t) \in \Delta$$

$$\boxed{g(z,t) = \frac{1}{2}\, e^{-z} \quad (z,t) \in \Delta}$$ 1pt

Loi marginale de Z

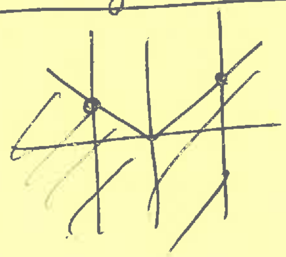


$$g(z,\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \displaystyle\int_{-z}^{+z} \left(\frac{1}{2} e^{-z}\right) dt = z\, e^{-z} & z > 0 \end{cases}$$

1pr

on reconnait une loi gamma $\Gamma(1,2)$ de moyenne $E[Z] = 2$ et de variance $Var[Z] = 2$

Loi marginale de T



$$g(\cdot,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-t}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-z}\, dz & t < 0 \\ \displaystyle\int_{t}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-z}\, dz & t > 0 \end{cases}$$

Soit
$$g(\cdot,t) = \begin{cases} t < 0 & \frac{1}{2}\left[-e^{-z}\right]_{-t}^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{2} e^{t} \quad t < 0} \\ t > 0 & \frac{1}{2}\left[-e^{-z}\right]_{t}^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{2} e^{-t} \quad t > 0} \end{cases}$$

1pr

c'est la première loi de Laplace de moyenne $E(T) = 0$ et de variance $Var(T) = 2$

1pt pour les moyens et variances

3) $\phi_Z(t) = E(e^{itZ}) = E(e^{it(X+Y)}) = \phi_X(t)\,\phi_Y(t)$

En utilisant les tables, on obtient $\phi_Z(t) = \dfrac{1}{(1-it)^2}$ 1pt

qui est la fonction caractéristique d'une loi $\Gamma(1,2)$.

On retrouve le résultat de la question précédente

2) $\mathrm{Cov}(Z,T) = E[ZT] - \underbrace{E[Z]}_{2}\,\underbrace{E[T]}_{0} = E[ZT]$

donc $\mathrm{cov}(Z,T) = E[(X+Y)(X-Y)] = E[X^2 - Y^2]$

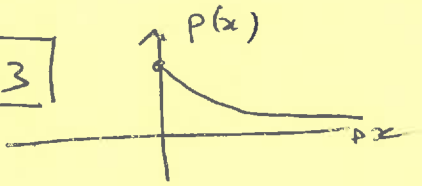
$$\left(= \mathrm{Var}\,X + E^2[X] - \mathrm{Var}\,Y - E^2[Y]\right)$$

$$= E[X^2] - E[Y^2]$$

Comme X et Y ont la même loi $E[X^2] = E[Y^2]$ donc

$\boxed{\mathrm{cov}(Z,T) = 0}$ (1pt)

Exercice 3



1) $F(x) = P[X < x] = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} p(u)\,du = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left[-e^{-au}\right]_0^x = 1 - e^{-ax} & x > 0 \end{cases}$ (1pt)

$F(m) = \frac{1}{2} \iff 1 - e^{-am} = \frac{1}{2} \iff e^{-am} = \frac{1}{2}$

$\iff -am = -\ln 2$

d'où $\boxed{m = \dfrac{\ln 2}{a}}$ (1pt)

2) $Y_i \nearrow 1$, $\searrow 0$

$P(Y_i = 1) = P(Y_i > m) = 1 - F(m) = \frac{1}{2}$

$P(Y_i = 0) = P(Y_i < m) = F(m) = \frac{1}{2}$

donc Y_i suit une loi uniforme sur $\{0,1\}$ (1pt)

ou une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$

3) $S_n \sim B(n, \frac{1}{2})$ de moyenne $E(S_n) = \frac{n}{2}$ et de variance $\mathrm{Var}\,S_n = \frac{n}{4}$ (1pt)

4) D'après le théorème de la limite centrale, on peut approcher la loi de S_n par une loi normale $N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$ (1pt)

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne $\quad \sigma^2$: variance $\quad$ **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ, ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne $\quad \sigma^2$: variance $\quad$ **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1!\dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$