Ex1

1) Il est clair que T est à valeurs dans $\{0,1\}$. De plus

$$P[T=0] = P[Z=1 \text{ et } X=0] + P[Z=0 \text{ et } Y=0]$$

$$= \alpha(1-p) + (1-\alpha)(1-p) = \boxed{1-p}$$

indépendance de Z et X et de Z et Y

1pt

$$P(T=1) = 1 - P[T=0] = \boxed{p}$$

On voit donc que T suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

2) Le couple (T,X) prend ses valeurs dans l'ensemble $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Pour déterminer sa loi, il suffit donc de déterminer les quatres probabilités $p_{00}=P[T=0,X=0]$, $p_{01}=P[T=0,X=1]$, $p_{10}=P[T=1,X=0]$ et $p_{11}=P(T=1,X=1)$. Les calculs sont élémentaires.

$$p_{00} = P[T=0,X=0] = P[\text{"}X=0,\ Z=1 \text{ et } X=0\text{" ou "}X=0, Z=0, Y=0\text{"}]$$

$$= \boxed{\alpha(1-p) + (1-\alpha)(1-p)^2}$$

$$p_{01} = P[T=0, X=1] = \underbrace{P[X=1, Z=1, X=0]}_{\text{impossible}} + \underbrace{P[X=1, Z=0, Y=0]}_{(1-\alpha)p(1-p)}$$

2pts

$$= \boxed{(1-\alpha)p(1-p)}$$

$$p_{10} = P[T=1, X=0] = \boxed{(1-\alpha)p(1-p)}$$

$$p_{11} = P(T=1, X=1) = P[X=1, Z=1, X=1] + P[X=1, Z=0, Y=1]$$

$$= \boxed{\alpha p + (1-\alpha)p^2}$$

On remarquera que

$$p_{00}+p_{01}+p_{10}+p_{11} = \cancel{\alpha p}\ \alpha(1-p) + (1-p)^2 - \alpha(1-p)^2 + 2p(1-p)(1-\alpha) + \alpha p + (1-\alpha)p^2$$

$$= \alpha\underbrace{(1-p-1-p^2+2p+p-p^2-2p+2p^2)}_{0} + 1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 + p^2 = 1$$

3) $\text{cov}(T,X) = E(TX) - E(T)E(X)$

$= P[T=1, X=1] - P(T=1)\,P[X=1]$

(1pt) $= \alpha p + (1-\alpha)p^2 - p^2 = \alpha p - \alpha p^2 = \boxed{\alpha p(1-p)}$

<u>coefficient de corrélation</u>

$$r(T,X) = \frac{\text{cov}(T,X)}{\sigma_T \sigma_X} =$$

Mais $\sigma^2_X = E(X^2) - E^2(X) = E(X) - E^2(X) = E(X)[1-E(X)] = \boxed{p(1-p)}$

$X \in \{0,1\}$

et

$\sigma^2_T = \boxed{p(1-p)}$

Donc $r(T,X) = \dfrac{\alpha p(1-p)}{p(1-p)}$ soit $\boxed{r(T,X) = \alpha}$

(1pt)

4) Si les variables T et X étaient indépendantes, on aurait

$\text{cov}(T,X) = 0$,

ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente. <u>L'intérêt pratique de cet exercice est de savoir générer des variables de Bernoulli corrélées ayant un coefficient de corrélation donné</u>

(1pt)

Ex2

1) Puisque les variables X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X,Y) est de densité $p(x,y) = p(x,\cdot)\,p(\cdot,y) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

d'où

$$\boxed{p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } (x,y) \in]-1,1[\times]-1,+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(1pt)

2) Le changement de variables est bijectif puisque

$$\begin{cases} Z = X+Y \\ T = X-Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = \frac{1}{2}(Z+T) \\ Y = \frac{1}{2}(Z-T) \end{cases}$$

Le Jacobien de la transformation est $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

donc $\boxed{|J| = \frac{1}{2}}$

Le théorème du changement de variables nous permet de conclure que la densité du couple (Z,T) est

$$\pi(z,t) = \underbrace{p\left(\frac{1}{2}(z+t), \frac{1}{2}(z-t)\right)}_{} \times \frac{1}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{2}(z+t) \in]-1,+1[\text{ et } \frac{1}{2}(z-t) \in]-1,+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

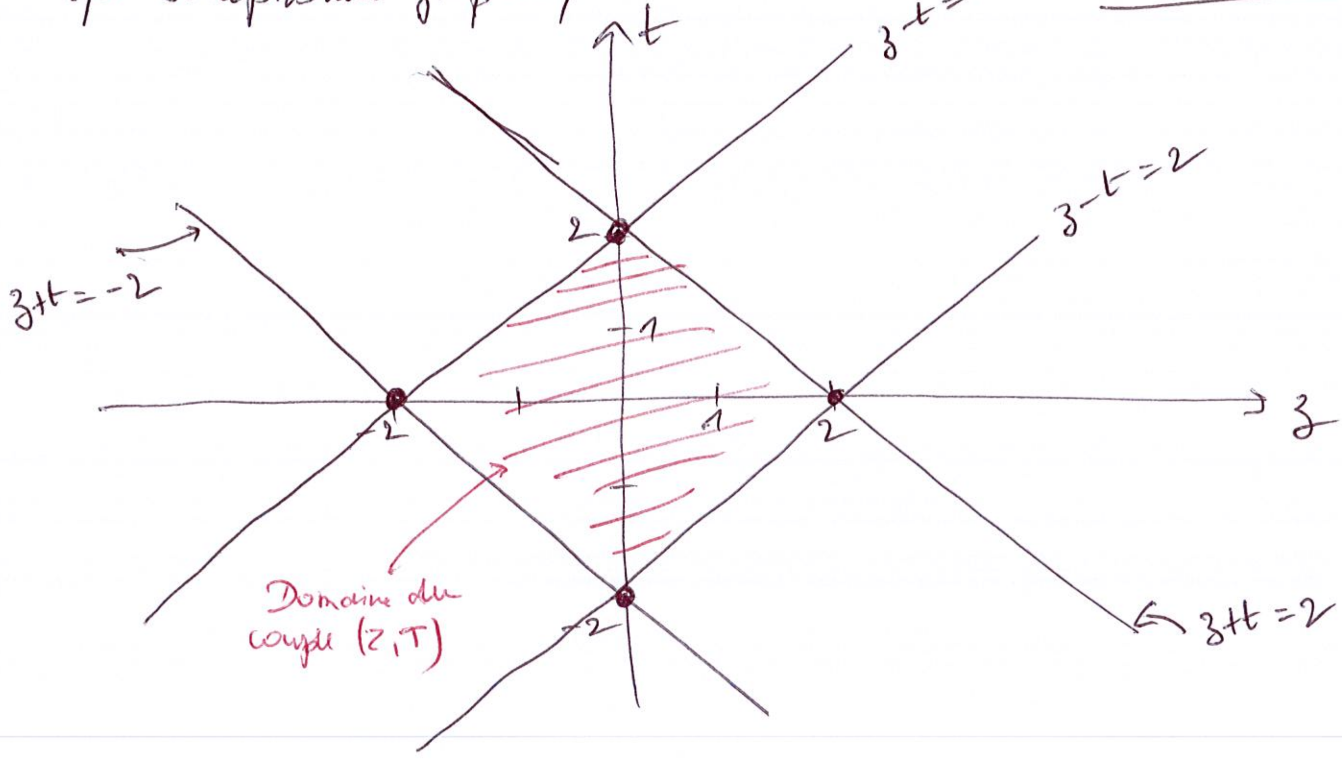
<u>Domaine de (Z,T)</u>

Le domaine de (Z,T) est défini par

$$\begin{cases} z+t > -2 \\ z+t < 2 \\ z-t > -2 \\ z-t < 2 \end{cases}$$

Bijection : 1pt
Jacobien : 1 pt
Densité : 1 pt
Domaine : 1 pt
<u>Total</u> : 4pts

qui se représente graphiquement comme suit



3) La loi marginale de Z est définie par

$$\pi(z,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \pi(z,t)\,dt$$

D'après le graphique précédent, on a

$$\pi(z,\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } z>2 \text{ ou } z<-2 \\ \displaystyle\int_{-2-z}^{z+2} \frac{1}{8}\,dt & \text{si } z\in[-2,0] \\ \displaystyle\int_{z-2}^{2-z} \frac{1}{8}\,dt & \text{si } z\in[0,2] \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\pi(z,\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } z\notin[-2,2] \\ \dfrac{z+2}{4} & \text{si } z\in\,]-2,0] \\ \dfrac{2-z}{4} & \text{si } z\in[0,2[\end{cases}}$$

2pt

4) La fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z=X+Y$ est définie par

$$\phi_Z(t) = E[e^{itZ}] = E[e^{itX}e^{itY}]$$

Comme X et Y sont indépendants, e^{itX} et e^{itY} le sont aussi, donc

$$\boxed{\phi_Z(t) = \phi_X(t)\,\phi_Y(t)}$$

La fonction caractéristique d'une loi uniforme sur $[-1,+1]$ est donnée dans la table

$$\phi_X(t) = \frac{(e^{it}-e^{-it})}{2it} = \frac{\sin t}{t} = \phi_Y(t)$$

On en déduit $\boxed{\phi_Z(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}$

Si on fait $a=-2$, $b=2$ et $c=0$ dans $\phi_{a,b,c}(t)$, on obtient

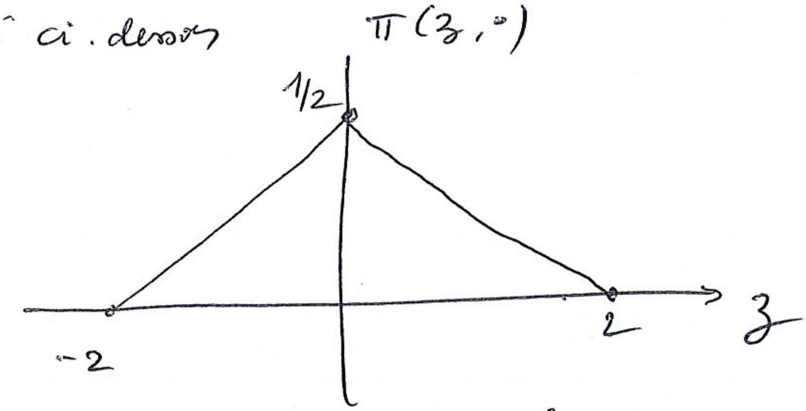
$$\phi_{-2,2,0}(t) = -\cancel{2}\,\frac{2e^{-2it} - 4e^{0} + 2e^{2it}}{4(\cancel{2})(2)t^2} = \frac{4 - 2e^{2it} - 2e^{-2it}}{8t^2}$$

$b-c=2$
$b-a=4$
$c-a=2$

Soit $\phi_{-2,2,0}(t) = \frac{4-2(2\cos 2t)}{8t^2} = \frac{1-\cos 2t}{2t^2} = \boxed{\frac{\sin^2 t}{t^2}}$

Donc la fonction caractéristique de Z est $\phi_{-2,2,0}(t)$. On sait qu'une fonction caractéristique caractérise une loi de probabilité. Donc la densité de Z est $\pi_{-2,2,0}(z)$ qui est représentée ci-dessous

2pts



ce qui correspond au résultat trouvé à la question précédente

Ex3 = On peut obtenir $V = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ par transformation affine de $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$ puisque

⑥

$$V = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A & O_2 \\ \hline O_2 & B \end{array}\right]}_{M} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

où O_2 est la matrice nulle de taille 2×2. Le rang de M est égal à 4 puisque $\det(M) = \det(A) \times \det(B) \neq 0$.

On en conclut

$$V \sim N_4\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, MM^T\right)$$

Mais

$$MM^T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

~~On notera $MM^T = \frac{1}{2} I_4$ où I_4 est la matrice identité de taille 4×4~~.

2) Y et Z sont deux sous vecteurs du vecteur gaussien V. En utilisant les résultats concernant les lois marginales d'un vecteur gaussien, on obtient

$$Y \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right) \text{ et } Z \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\right)$$

Toutes les covariances entre les composants de Y et celles de Z sont nulles. Comme $\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$ est un vecteur gaussien, on en déduit

<u>Y et Z vecteurs indépendants</u>

3) On a $T = 2(Y_1^2 + Y_2^2)$ avec $Y_1 \sim N(0, \frac{1}{2})$ et $Y_2 \sim N(0, \frac{1}{2})$

Donc $\sqrt{2}Y_1 \sim N(0,1)$

$\sqrt{2}Y_2 \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$ $\boxed{2Y_1^2 + 2Y_2^2 \sim \chi^2_2}$

Y_1 et Y ind

7