[6 points]

①

Ex1 ① Comme X et Y sont à valeurs dans $\{0,1\}$, T prend clairement ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. De plus, comme X et Y sont indépendantes

(1pt)

$$P[T=0] = P(X+Y=0] = P[X=0, Y=0] = \boxed{\cancel{p^2}}\ q^2$$

$$P(T=2] = P[X+Y=2] = P(X=1, Y=1] = \boxed{\cancel{q^2}}\ p^2$$

$$P(T=1] = P[X=1, Y=0] + P(X=0, Y=1] = \boxed{2pq}$$

c'est une loi binomiale $B(2,p)$

② La fonction caractéristique de T est

$$\phi_T(t) = E[e^{iTt}] \underset{T=X+Y}{=} E[e^{iXt} e^{iYt}] \underset{X \text{ et } Y \text{ ind}}{=} \phi_X(t)\,\phi_Y(t)$$

(1pt)

En utilisant les tables, on obtient

$$\phi_T(t) = (pe^{it} + q)^2$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi binomiale $B(2,p)$

donc on retrouve $\boxed{T \sim B(2,p)}$

③ On a $\begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+Y \\ X \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = U \\ Y = T-U \end{cases}$

Le changement de variables est donc bijectif. (à une valeur du couple $\binom{X}{Y}$ correspond une et une seule valeur du couple $\binom{T}{U}$). De plus

(1pt's)

$\binom{X}{Y} = \binom{0}{0} \Rightarrow \binom{T}{U} = \binom{0}{0}$ avec probabilité $P[X=0, Y=0] = \cancel{p^2}\ q^2$

$\binom{X}{Y} = \binom{1}{0} \Rightarrow \binom{T}{U} = \binom{1}{1}$ avec probabilité $P[X=1, Y=0] = pq$

$\binom{X}{Y} = \binom{0}{1} \Rightarrow \binom{T}{U} = \binom{1}{0}$ avec probabilité $P[X=0, Y=1] = pq$

$\binom{X}{Y} = \binom{1}{1} \Rightarrow \binom{T}{U} = \binom{2}{1}$ avec probabilité $P[X=1, Y=1] = \cancel{q^2}\ p^2$

La loi marginale de T s'obtient facilement à partir de la loi du couple $\binom{T}{U}$

(1pt)

$$P[T=0] = P\left[\binom{T}{U} = \binom{0}{0}\right] = p^2$$

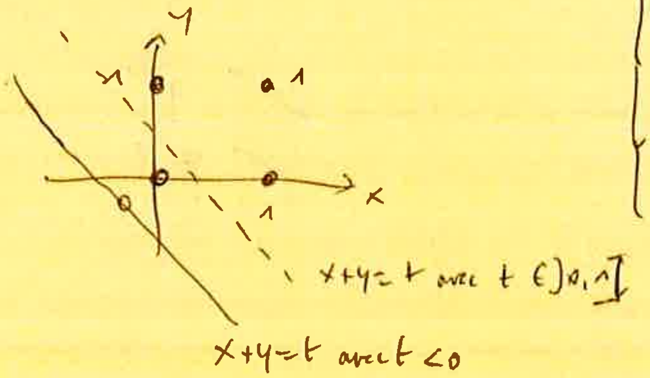
$$P(T=2] = P\left[\binom{T}{U} = \binom{2}{1}\right] = q^2$$

$$P(T=1] = P\left[\binom{T}{U} = \binom{1}{1} \text{ ou } \binom{T}{U} = \binom{1}{0}\right] = 2pq$$

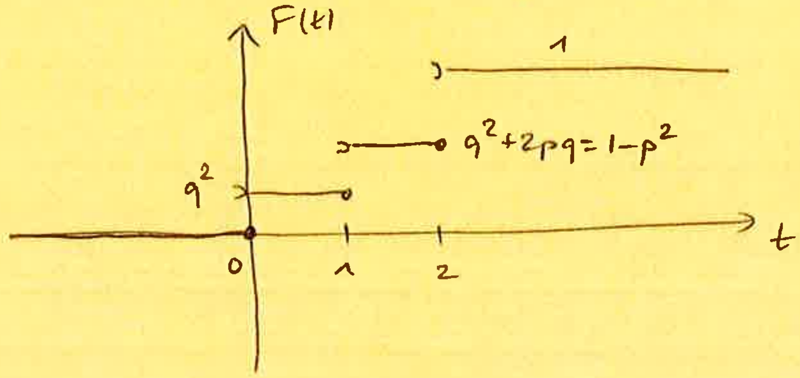
On retrouve la loi binomiale $B(2,p)$

④ $F(t) = P[X+Y < t] = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ P[(X,Y)=(0,0)] = q^2 & \text{si } t \in]0,1] \\ P[(X,Y)=(0,0) \text{ ou } (X,Y)=(1,0) \text{ ou } (X,Y)=(0,1)] \\ = q^2+2pq & \text{si } t \in]1,2] \\ 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$

(1pt)



ce qui donne la représentation graphique suivante



Les valeurs possibles de T sont les points de discontinuité de F, i.e.,

$T \in \{0,1,2\}$ - les probabilités associées sont les "hauteurs" des escaliers

car

$P(T=0) = q^2$

$P(T=1) = q^2+2pq - q^2 = 2pq$

$P(T=2) = 1-(1-p^2) = p^2$

(1pt)

Ex2 $\boxed{8 \text{ points}}$

1) La fonction caractéristique de T est

$$\phi_T(t) = E[e^{iTt}] \underset{T=X+Y}{=} E[e^{iXt} e^{iYt}] \underset{X \text{ et } Y \text{ ind}}{=} \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

En utilisant la table, on obtient

(1pt) $$\phi_T(t) = \frac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^2}$$ qui est la fonction caractéristique d'une loi $\Gamma(\lambda,2)$

donc $\boxed{T \sim \Gamma(\lambda,2)}$

2) $\begin{cases} T = X+Y \\ Z = X-Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{T+Z}{2} \\ Y = \frac{T-Z}{2} \end{cases}$

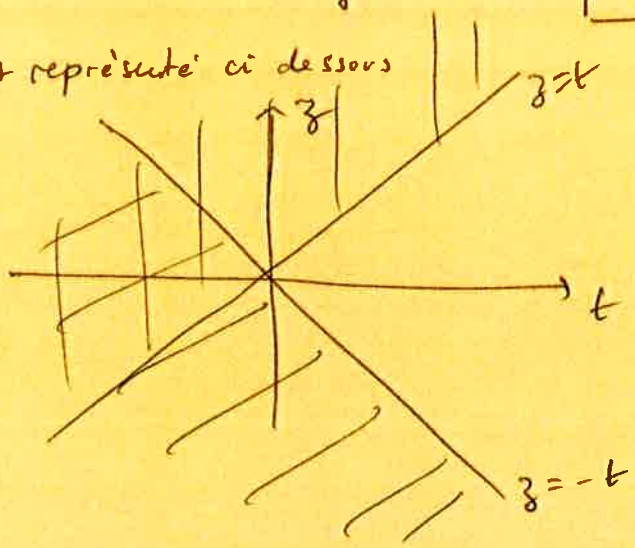
(1pt)

Donc ce changement de variables est bijectif de $(\mathbb{R}^+)^2$ dans Δ.

Le domaine Δ est défini par

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+z > 0 \\ t-z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} z < t \\ z > -t \end{cases}}$$

Il est représenté ci dessous



le domaine Δ est la partie non hachurée.

(1pt)

Le Jacobien de la transformation est

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

(1pt) d'où $\boxed{|\det(J)| = \frac{1}{2}}$

On en déduit la densité du couple (T, Z)

$$\pi(t,z) = \frac{\lambda^2}{2} \exp\left[-\lambda\left(\frac{t+z}{2} + \frac{t-z}{2}\right)\right] \quad (t,z) \in \Delta$$

Soit

(1pt) $$\boxed{\pi(t,z) = \frac{\lambda^2}{2} \exp(-\lambda t)\, \mathbb{1}_\Delta(z,t)}$$

La loi marginale de T s'obtient par intégration de $\pi(t,z)$ puisque

$$\pi(t,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \pi(t,z)\,dz$$

On voit d'après le domaine représenté ci-dessus que $\pi(t,\cdot) = 0$ si $t < 0$

et que $\pi(t,\cdot) = \int^{t} \pi(t,z)\,dz$ pour $t > 0$

Soit pour $t>0$ $\quad \pi(t,\cdot) = \int_{-t} \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda t}\, dz = \lambda^2 t\, e^{-\lambda t}$

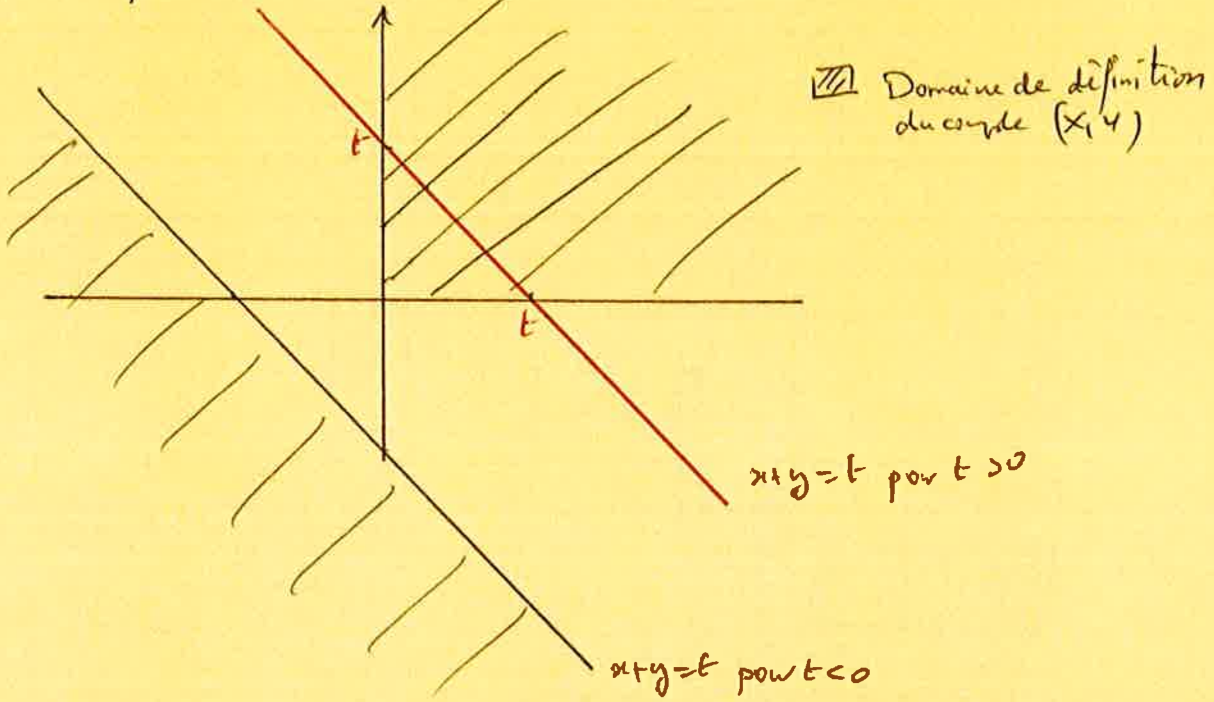
(1pt) c'est-à-dire $\quad \boxed{\pi(t,\cdot) = \lambda^2 t\, e^{-\lambda t}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)}$

On retrouve la densité d'une loi $\Gamma(\lambda, 2)$.

3) La fonction de répartition de T est définie par

$$F(t) = P[T<t] = P[X+Y<t] = \iint_{D_t} p(x,y)\,dx\,dy$$

où $D_t = \{(x,y) / x+y<t\}$ est le demi plan délimité par la droite d'équation $x+y=t$ représenté ci-dessous



On observe sur le graphe ci dessus que $F(t)=0$ si $t<0$ et que

pour $t>0$

$$F(t) = \int_0^t \left[\int_0^{t-x} \lambda^2 \exp[-\lambda(x+y)]\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \underbrace{\left(-\left[e^{-\lambda y}\right]_0^{t-x}\right)}_{1-e^{-\lambda t}e^{\lambda x}} dx$$

$$= \int_0^t \left(\lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda t}\right)dx$$

Soit $F(t) = \left[-e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda t} x \right]_0$ pour $t>0$

$= -e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} + 1$

On en déduit la densité de T par

2pts

$$\pi(t,\cdot) = \frac{dF(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \cancel{\lambda e^{-\lambda t}} - \cancel{\lambda e^{-\lambda t}} - \lambda t(-\lambda) e^{-\lambda t} & t>0 \end{cases}$$

soit $\boxed{\pi(t,\cdot) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)}$

~~5pts~~ 6pts $\boxed{\text{Ex 3} = 6 \text{ points}}$ 1pt

1) (X,Y,Z) suit une loi normale à 3 dimensions de moyenne $m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $\Sigma = I_3$ (matrice identité de taille 3×3)

2) On a $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+Y-Z \\ aX+bY \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

Comme $a \neq 0$ et $b \neq 0$, la matrice A est de rang égal à 2 1pt

donc $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien de moyenne $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

de matrice de covariance $\Sigma = A I_3 A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & a+b \\ a+b & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

1pt

on en déduit $U \sim N(0,3)$, $V \sim N(0, a^2+b^2)$

Puisque $(U,V)^T$ est un vecteur gaussien, les variables U et V sont indépendantes si et ssi $\mathrm{cov}(U,V)=0$

soit $\boxed{U \text{ et } V \text{ indépendants} \Leftrightarrow a+b=0}$ 1pt

3)

3) D'après la question précédente, on a $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ ⑥

et $V \sim N(0,2)$

Donc $p(u,v) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u\ v)\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]$ avec $\det\Sigma = 6$

soit $\boxed{p(u,v) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{3}+\frac{v^2}{2}\right)\right] \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2}$

De plus, comme $V \sim N(0,2)$, on a

$$p(\cdot,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\times 2}\right) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{4}\right) \quad v \in \mathbb{R}}$$

On en déduit que la loi conditionnelle de $U|V=v$ est de densité

$$p(u|v) = \frac{p(u,v)}{p(\cdot,v)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left[-\frac{u^2}{6}-\frac{v^2}{4}\right]}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{4}\right)}$$

Soit $\boxed{p(u|v) = \dfrac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{6}\right) \quad u \in \mathbb{R}}$

C'est une loi normale $N(0,3)$. On remarque que la loi de $U|V=v$ est identique à la loi de U, ce qui est compréhensible car les conditions $a=1$ et $b=-1$ assurent l'indépendance des variables U et V.