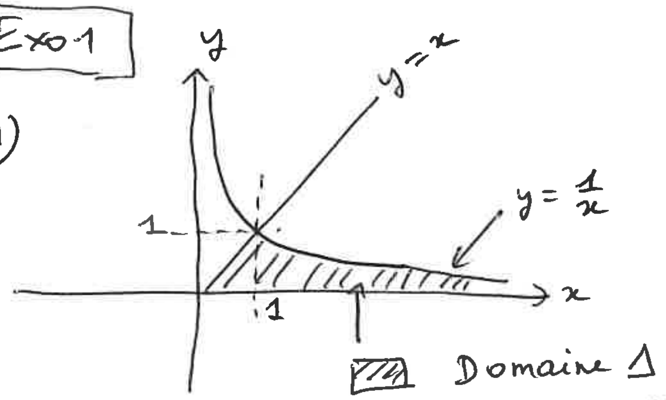
Exo 1

1)

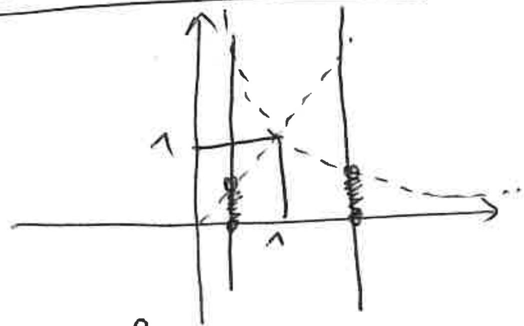


Δ est le domaine hachuré sur la figure. En observant les valeurs du couple (x,y) appartenant à ce domaine Δ, on en conclut que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*} =]0,+\infty[$ et que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$.

Si les variables X et Y étaient indépendantes, le couple (X,Y) serait de support $]0,+\infty[\times]0,1[$, ce qui n'est pas le cas.

Donc X et Y sont des variables aléatoires dépendantes

2) Par définition, la densité de X est



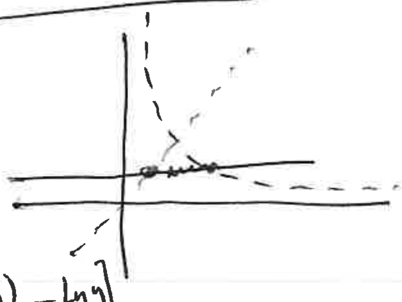
$$p(x,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)\,dy$$

En observant le dessin, on a

$$p(x,\cdot) = \begin{cases} \int_0^x p(x,y)\,dy & \text{si } x \in]0,1[\\ \int_0^{\frac{1}{x}} p(x,y)\,dy & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \notin]0,+\infty[\end{cases}$$

On a donc

$$\boxed{p(x,\cdot) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{2x}\,dy = \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0,1[\\ \int_0^{1/x} \frac{1}{2x}\,dy = \frac{1}{2x^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$



De même

- si $y \in]0,1[$

$$p(\cdot,y) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)\,dx = \int_y^{\frac{1}{y}} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1/y) - \ln y\right]$$

donc $\boxed{p(\cdot,y) = -\ln y \quad \text{si } y \in]0,1[}$

- si $y \notin]0,1[$ $\quad \boxed{p(\cdot,y) = 0}$

3) On a les équivalences suivantes

$$\begin{cases} Z=\sqrt{XY} \\ T=\sqrt{\frac{Y}{X}} \\ X>0, Y>0 \end{cases} \underset{\text{car } X>0 \text{ et } Y>0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} X>0, Y>0 \\ XY = Z^2 \\ Y/X = T^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X>0, Y>0 \\ Y=T^2X \\ X(T^2X)=Z^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} X=\frac{Z}{T} \\ Y=ZT \\ X>0, Y>0 \end{cases}}$$

Le changement de variables est donc bijectif de Δ dans D

Recherche de D

$$\begin{cases} 0<y<x \\ 0<y<\frac{1}{x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0<zt<\frac{z}{t} \\ 0<zt<\frac{t}{z} \end{cases} \underset{\substack{z>0 \\ t>0}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 0<t<\frac{1}{t} \\ 0<z<\frac{1}{z} \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} t\in]0,1[\\ z\in]0,1[\end{cases}}$$

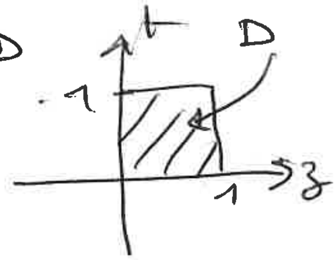
Le couple (Z,T) est donc à valeurs dans $]0,1[\times]0,1[$

Le Jacobien de ce changement de variables est

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & t \\ -\frac{z}{t^2} & z \end{vmatrix} = \frac{z}{t}+\frac{z}{t} = \boxed{\frac{2z}{t}}$$

On en déduit la densité du couple (Z,T)

$$g(z,t) = \frac{1}{2}\,\frac{t}{z} \times \frac{2z}{t} = 1 \quad \text{si } (z,t)\in D$$



donc $\boxed{g(z,t) = \mathbb{1}_{]0,1[\times]0,1[}(z,t)}$

Les lois marginales du couple (Z,T) se déterminent facilement

$$g(z,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} g(z,t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } z\in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\boxed{Z\sim U(]0,1[) \text{ et de manière similaire } T\sim U(]0,1[)}$

4) D'après ce qui précède, on a $Y=ZT$ avec Z et T variables indépendantes, donc

$$E[Y] = E[ZT] = E[Z]\,E[T] = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

De même

$$E[Y^2] = E[Z^2]\,E[T^2] = \left(\operatorname{Var}Z + E^2[Z]\right)\left(\operatorname{Var}T + E^2[T]\right)$$

Mais $\text{Var}\, Z = \frac{1}{12}$ et $E^2[Z] = \frac{1}{4}$ donc $E[Z^2] = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

donc $E[Z^2]E(T^2) = \boxed{E(Y^2) = \frac{1}{9}}$

d'où $\text{Var}\, Y = E(Y^2) - E^2[Y] = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{144}}$

De plus $E[X] = E\left[\frac{Z}{T}\right] = E[Z]\, E\left[\frac{1}{T}\right]$

avec $E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^1 \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_0^1 = \infty$ donc E[X] n'existe pas

De même Var X n'est pas définie.

Exercice 2

1) Si $X \sim N(0,1)$ on a $\Phi(x) = P[X < x]$ et donc

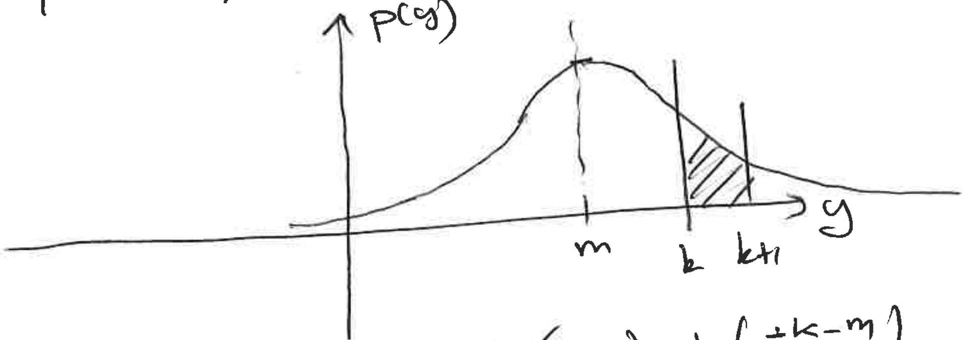
$$\phi\left(\frac{k-m}{\sigma}\right) = P\left[X < \frac{k-m}{\sigma}\right] = P[\sigma X + m < k]$$

$$\phi\left(\frac{k+1-m}{\sigma}\right) = P\left[X < \frac{k+1-m}{\sigma}\right] = P[\sigma X + m < k+1]$$

où $Y = \sigma X + m \sim N(m, \sigma^2)$ - On en déduit que

$$p_k = P[Y < k+1] - P[Y < k] = P[Y \in]k, k+1[]$$

ce qui correspond à l'aire hachurée sur la figure



2) On a $\sum_{k=-K}^{+K} p_k = \underbrace{\cancel{\phi\left(\frac{-K+1-m}{\sigma}\right)} - \phi\left(\frac{-K-m}{\sigma}\right)}_{p_{-K}} + \underbrace{\cancel{\phi\left(\frac{-K+2-m}{\sigma}\right)} - \cancel{\phi\left(\frac{-K+1-m}{\sigma}\right)}}_{p_{-K+1}}$

$+ \dots + \underbrace{\cancel{\phi\left(\frac{K-m}{\sigma}\right)} - \cancel{\phi\left(\frac{K-1-m}{\sigma}\right)}}_{p_{K-1}} + \underbrace{\phi\left(\frac{K+1-m}{\sigma}\right) - \cancel{\phi\left(\frac{K-m}{\sigma}\right)}}_{p_K}$

donc $\boxed{\sum_{k=-K}^{+K} p_k = \phi\left(\frac{K+1-m}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{-K-m}{\sigma}\right)}$

donc $\lim_{K \to +\infty} \sum_{k=-K}^{+K} p_k = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = 1 - 0 = \boxed{1}$

3) Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(m, \sigma^2)$, alors $X_t = \text{ent}\left(\frac{X}{t}\right)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (comme toute partie entière). Donc

$$P[X_t = k] = P\left[\text{ent}\left(\frac{X}{t}\right) = k\right]$$

$$= P\left[k \leq \frac{X}{t} < k+1\right]$$

$$\underset{t>0}{=} P[kt \leq X < (k+1)t]$$

$$= P\left[\frac{kt-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} < \frac{(k+1)t-m}{\sigma}\right]$$

$$\underset{\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)}{=} \phi\left[\frac{(k+1)t-m}{\sigma}\right] - \phi\left[\frac{kt-m}{\sigma}\right]$$

$$= \phi\left[\frac{k+1-\frac{m}{t}}{\frac{\sigma}{t}}\right] - \phi\left[\frac{k-\frac{m}{t}}{\frac{\sigma}{t}}\right]$$

$\boxed{\text{On reconnait la probabilité } p_k \text{ pour une loi } dN\left(\frac{m}{t}, \frac{\sigma}{t}\right)}$

4) On a $P[X_t < x] = P\left[\text{ent}\left(\frac{X}{t}\right) < x\right]$

$$= P\left[\frac{X}{t} < x\right] \quad \text{car } x \in \mathbb{Z}$$

$$= P[X < tx] \quad \text{car } t > 0$$

donc $\boxed{F_t(x) = F_X(tx)}$

Mais comme $X_t \sim dN(m_t, \sigma_t)$, on a

$$P[X_t < x] \underset{x \in \mathbb{Z}}{=} \sum_{k=-\infty}^{x-1} P(X_t = k) = \boxed{\phi\left[\frac{x-m_t}{\sigma_t}\right]}$$

d'où le résultat $\boxed{F_t(x) = F_X(xt) = \phi\left[\frac{x-m_t}{\sigma_t}\right]}$ $\begin{matrix} x \in \mathbb{Z} \\ t > 0 \end{matrix}$

Si on pose $u = xt \in \mathbb{R}$ alors $x = \frac{u}{t}$ et donc l'égalité précédente s'écrit

$$F_X(u) = \Phi\left[\frac{u - tm_t}{t\sigma_t}\right]$$

Comme le terme de gauche ne dépend pas de t, il en est de même pour le terme de droite, ce qui impose que tm_t est une quantité indépendante de t notée m. De même $t\sigma_t$ est une quantité indépendante de t notée σ. On a donc

$$F_X(u) = \Phi\left[\frac{u-m}{\sigma}\right]$$

qui est la fonction de répartition d'une loi normale $N(m, \sigma^2)$

donc $\boxed{X \sim N(m, \sigma^2)}$

Exercice 3

1) Pour $u \neq 0$, $Y_u = u^T X$ est une transformation affine d'un vecteur gaussien avec une matrice $A = u^T$ de rang 1 donc

$$\boxed{Y_u = N_1(\underbrace{u^T m}_{Am}, \underbrace{u^T \Sigma u}_{A\Sigma A^T})}$$

2) $\phi_X(u) = E[e^{i(u_1 X_1 + \dots + u_n X_n)}]$
$= E[e^{iY_u}]$

donc $\boxed{\phi_X(u) = \phi_{Y_u}(1)}$

Par hypothèse, Y_u suit une loi normale à 1 dimension pour tout $u \neq 0$. Sa fonction caractéristique s'écrit donc

$$\phi_{Y_u}(t) = \exp\left(i m_u t - \frac{1}{2}\sigma_u^2 t^2\right)$$

avec $m_u = E(Y_u) = u^t m$ et $\sigma_u^2 = Var[Y_u] = u^T \Sigma u$

Donc $\boxed{\phi_{Y_u}(1) = \exp\left(i u^T m - \frac{1}{2} u^T \Sigma u\right)}$

d'où $\phi_X(u) = \exp\left(i u^T m - \frac{1}{2} u^T \Sigma u\right)$ soit $\boxed{X \sim N_n(m, \Sigma)}$

BARÈME

Exo 1 — 12 points

1) support de la densité du couple (0,5)
support de X : $]0,+\infty[$ (0,5)
support de Y : $]0,1[$ (0,5)
X et Y non indépendantes (0,5)

2 points

2) $$p(x,\cdot) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0,1[\quad (1\text{ pt}) \\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x>1 \quad (1\text{ pt}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2 points

$$p(\cdot,y) = \begin{cases} -\ln y & \text{si } y \in]0,1[\quad (0,5) \\ 0 & \text{sinon} \quad (0,5) \end{cases}$$

1 pt

3) $\begin{cases} X = Z/T \\ Y = ZT \end{cases}$ (1 pt)

4 points

$J = \frac{2z}{t}$ (1 pt)

$D =]0,1[\times]0,1[$ (1 pt)

Densité $q(z,t) = \mathbb{1}_D(z,t)$ (1 pt)

1 point

$Z \sim U(]0,1[)$
$T \sim U(]0,1[)$ (1 pt)

4) $E(Y) = \frac{1}{4}$ (0,5)

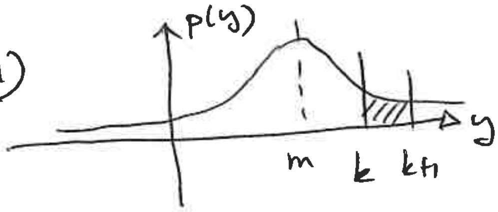
$\operatorname{Var} Y = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$ (0,5)

2 points

$E[X] = \infty$ (0,5)

$\operatorname{Var} X = \infty$ (0,5)

Exo 2 — 7 points

1) 

(1)

1 point

2) $\sum_{k=-K}^{+K} p_k = \phi\left[\frac{K+1-m}{\sigma}\right] - \phi\left[\frac{-K-m}{\sigma}\right]$ (1)

1 point

3) $P[X_t = k] = \phi\left[\frac{k+1-\frac{m}{t}}{\frac{\sigma}{t}}\right] - \phi\left[\frac{k-\frac{m}{t}}{\frac{\sigma}{t}}\right]$ (1)

1 point

4) $P[X_t < x] = F_X(xt)$ 1

$P[X_t < x] = \phi\left[\frac{x - m_t}{\sigma_t}\right]$ 1

$\boxed{4 \text{ points}}$

$F_X(u) = \Phi\left[\frac{u - t m_t}{t\sigma_t}\right]$ 1

$t m_t$ et $t\sigma_t$ indépendants de t 1

$\boxed{\text{Exo 3}}$

$\boxed{4 \text{ points}}$ 1) $Y_u = UX$ avec $U = u^T$ de rang 1 1

$Y_u \sim N_1(u^T m, u^T \Sigma u)$ 1

$\boxed{2 \text{ points}}$

2) $\phi_X(u) = \phi_{Y_u}(1)$ 1

$X \sim N_n(m, \Sigma)$ 1

$\boxed{2 \text{ points}}$