EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 25 octobre 2021 (8h-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : loi géométrique (5 points)

On considère une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définie dans $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ par

$$P[X = i] = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, ...$$

Quelques propriétés de cette loi sont dans la table et on adoptera la notation classique $X \sim \mathcal{G}(p)$. On rappelle le résultat élémentaire $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

1. Montrer que $P[X > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$.
   On a
   $$P[X > k] = \sum_{l=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{l-1} = p(1-p)^k \sum_{l=0}^{+\infty} (1-p)^l = (1-p)^k = q^k.$$

2. Montrer qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P[Y > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ est une loi géométrique (on pourra exprimer $P[Y = k]$ en fonction de $P[Y > k]$ et de $P[Y > k-1]$).
   En suivant l'indication, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
   $$P[Y = k] = P[Y > k-1] - P[Y > k] = q^{k-1} - q^k = pq^{k-1},$$
   donc la loi de Y est bien une loi géométrique.

3. Montrer qu'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p vérifie la propriété suivante (on dit que cette loi est "sans mémoire")
   $$P[X > k + l | X > l] = P[X > k], \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2.$$
   En utilisant la définition des probabilités conditionnelles
   $$P[X > k + l | X > l] = \frac{P[X > k + l, X > l]}{P[X > l]} = \frac{P[X > k + l]}{P[X > l]} = \frac{pq^{k+l}}{pq^l} = q^k = P[X > k].$$

4. Inversement, on considère une variable aléatoire Y de loi discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ..., \}$ qui est sans mémoire, i.e., qui vérifie
   $$P[Y > k + l | Y > l] = P[Y > k], \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2.$$
   On pose $p = P[Y = 1]$. Déterminer $P[Y > 1]$, puis $P[Y > 2]$ et en déduire que
   $$P[Y > k] = q^k, \forall k \in \mathbb{N}.$$
   Quelle est la loi de Y ? Que peut-on en conclure ?
   On a
   $$P[Y > 1] = 1 - P[Y = 1] = 1 - p = q.$$

De plus, en utilisant la propriété sans mémoire, on a

$$P[Y > 2] = P[Y > 2|Y > 1]P[Y > 1] = P[Y > 1] \times P[Y > 1] = q^2.$$

Une récurrence immédiate donne

$$P[Y > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On en conclut que Y suit une loi géométrique de paramètre p. La loi géométrique est donc la seule loi discrète sans mémoire définie sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 2: Couple de variables aléatoires uniformes corrélées (5 points)

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité

$$p_a(x, y) = \begin{cases} 1 - a(1-2x)(1-2y) \text{ si } (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $|a| < 1$.

1. Vérifier que p_a est une densité de probabilité pour toute valeur de $a \in] -1, +1[$. On admettra que $|(1-2x)(1-2y)| \leq 1, \forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$.
   Pour vérifier que p_a est une densité de probabilité, il faut tout d'abord vérifier que $\int\int_{\mathbb{R}^2} p_a(x, y)dxdy = 1$, ce qui est aisé puisque
   $$\int\int_{\mathbb{R}^2} p_a(x, y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 [1-a(1-2x)(1-2y)]dxdy = 1-a\int_0^1 (1-2x)dx \int_0^1 (1-2y)dy = 1.$$
   Il faut ensuite vérifier que $p_a(x, y) \geq 0, \forall x \in]0, 1[, \forall y \in]0, 1[$, ce qui évident si $|a| < 1$.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   La densité de X est non nulle sur l'intervalle $]0, 1[$. De plus, pour $x \in]0, 1[$, on a
   $$p_a(x, .) = \int_{\mathbb{R}} p_a(x, y)dy = \int_0^1 [1 - a(1-2x)(1-2y)]dy = 1 - a(1-2x)\int_0^1 (1-2y)dy = 1.$$
   X suit donc la loi uniforme sur $]0, 1[$. Il en est de même pour Y par symétrie.

3. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (X, Y).
   La covariance du couple (X, Y) est définie par $\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$. On a de manière évidente $E[X] = E[Y] = \frac{1}{2}$. De plus
   $$E[XY] = \int\int_{\mathbb{R}^2} xyp_a(x, y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xy[1 - a(1-2x)(1-2y)]dxdy.$$
   Mais
   $$\int_0^1\int_0^1 xydxdy = \int_0^1 xdx\int_0^1 ydy = \frac{1}{4}$$
   et
   $$\int_0^1\int_0^1 xy(1-2x)(1-2y)]dxdy = \left[\int_0^1 x(1-2x)dx\right]^2 = \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right]^2 = \frac{1}{36},$$
   d'où
   $$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{4} - \frac{a}{36} - \frac{1}{4} = -\frac{a}{36}.$$
   Le coefficient de corrélation du couple (X, Y) est donc
   $$r_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} = -\frac{\frac{a}{36}}{\frac{1}{12}} = -\frac{a}{3}.$$

4. En prenant soin de justifier votre réponse, déterminer la ou les les valeur(s) de a pour lesquelles les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Si X et Y sont indépendantes, alors $r_{X,Y} = 0$ donc $a = 0$ est la seule valeur de a pour laquelle X et Y peuvent être indépendantes. De plus, pour $a = 0$, on a

$$p_a(x,y) = p_0(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

qui est le produit de la densité de X ($p_0(x,.) = \mathcal{I}_{]0,1[}(x)$) et de celle de Y ($p_0(.,y) = \mathcal{I}_{]0,1[}(y)$). Donc, pour $a = 0$, on a $p_0(x,y) = p_0(x,.)p_0(.,y), \forall x, \forall y$, ce qui montre que X et Y sont indépendantes si et seulement si $a = 0$.

Exercice 3 : Changement de variables continues (5 points)

On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) de densité

$$p_a(x,y) = \begin{cases} 1 - a(1-2x)(1-2y) \text{ si } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $|a| < 1$.

1. Déterminer la loi du couple (T,U) lorsque $T = -\frac{1}{\lambda}\ln X$ et $U = -\frac{1}{\mu}\ln Y$ avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
Le changement de variables proposé est clairement bijectif car

$$\begin{cases} T = -\frac{1}{\lambda}\ln X \\ U = -\frac{1}{\mu}\ln Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = \exp(-\lambda T) \\ Y = \exp(-\mu U) \end{cases}$$

Le Jacobien du changement de variables est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \\ \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial U} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda\exp(-\lambda T) & 0 \\ 0 & -\mu\exp(-\mu U) \end{vmatrix} = \boxed{\lambda\mu\exp(-\lambda T - \mu U)}$$

On en déduit la densité du couple (T,U) :

$$\boxed{g(t,u) = \lambda\mu\exp(-\lambda t - \mu u)\left[1 - a(1-2e^{-\lambda t})(1-2e^{-\mu u})\right] I_\Delta(t,u)}$$

où Δ est le domaine de définition du couple (T,U) qu'il convient de déterminer.
Le domaine Δ est l'image de $]-0,1[\times]0,1[$ par le changement de variables. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < e^{-\lambda t} < 1 \\ 0 < e^{-\mu u} < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t \in]0,+\infty[\\ u \in]0,+\infty[\end{cases}$$

donc $\Delta =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

2. Quelles sont les lois marginales de T et de U ? Pour quelle valeur de a les variables T et U sont-elles indépendantes ?
La densité de T est nulle pour $t < 0$. De plus, pour $t > 0$, on a

$$p(t,.) = \int_{\mathbb{R}} p(t,u)du = \int_0^{+\infty} \lambda\mu\exp(-\lambda t - \mu u)\left[1 - a(1-2e^{-\lambda t})(1-2e^{-\mu u})\right] du.$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$p(t,.) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

qui est une loi exponentielle de paramètre λ (ou une loi gamma de paramètres $\nu = 1$ et $\theta = \lambda$). De même, par symétrie,

$$p(.,u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u} \text{ si } u > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

qui est une loi exponentielle de paramètre μ.
Les variables U et T sont indépendantes si et seulement si $p(t,u) = p(t,.)p(.,u), \forall t, \forall u$ soit

$$\lambda\mu \exp(-\lambda t - \mu u) \left[1 - a(1 - 2e^{-\lambda t})(1 - 2e^{-\mu u})\right] = \lambda\mu e^{-\lambda t} e^{-\lambda u}, \forall t > 0, \forall u > 0.$$

On en déduit que U et T sont indépendantes si et seulement si $a = 0$. Pour $a \neq 0$, le couple (U,V) est un couple de deux variables aléatoires corrélées de lois exponentielles.

Exercice 4 : Méthode Delta (5 points)

On considère n variables aléatoires indépendantes X_i de lois exponentielles de densités

$$p(x_i) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x_i) \text{ si } x_i > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la moyenne et la variance de X_i.
   On reconnaît une loi gamma $\mathcal{G}(1,\lambda)$ de moyenne $E[X_i] = \frac{1}{\lambda}$ et de variance $\text{var}[X_i] = \frac{1}{\lambda^2}$.

2. Quelle est la loi approchée pour n “grand” de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ issue de l'application du théorème de la limite centrale ? Quelle est la loi asymptotique de $U_n = \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$ lorsque $n \to \infty$.
   Le théorème de la limite centrale nous dit que $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donc pour n “grand”, on peut approcher la loi de $\bar{X}_n$ par une loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{n\lambda^2}\right)$. La loi asymptotique de U_n est une loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right)$ (transformation affine de $\bar{X}_n$).

3. On admet que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, si $\sqrt{n}\left[\bar{X}_n - m\right]$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $g'(m) \neq 0$, alors $\sqrt{n}\left[g(\bar{X}_n) - g(m)\right]$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2[g'(m)]^2)$. En déduire les lois approchées de $Y_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$ et de $Z_n = \exp\left(\bar{X}_n\right)$ pour n “grand”.
   On a $Y_n = g(\bar{X}_n))$ avec $g(u) = \frac{1}{u}$. L'application du théorème nous dit que $\sqrt{n}\left(Y_n - \lambda\right)$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2[g'(m)]^2))$ avec $m = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ et $[g'(m)]^2 = \lambda^4$. Donc pour n grand, on peut approcher la loi de Y_n par une loi normale $\mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n}\right)$.
   De la même façon, $Z_n = g(\bar{X}_n)$ avec $g(u) = \exp(u)$. L'application du théorème nous dit que $\sqrt{n}\left(Z_n - e^{1/\lambda}\right)$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2[g'(m)]^2))$ avec $m = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ et $[g'(m)]^2 = \exp(2/\lambda)$. Donc pour n grand, on peut approcher la loi de Z_n par une loi normale $\mathcal{N}\left(\exp\left(\frac{1}{\lambda}\right), \frac{1}{n\lambda^2}\exp(2/\lambda)\right)$.

Barème

Exercice 1 : loi géométrique (5 **points)**

- Montrer que $P[X > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$: 1pt
- Montrer qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P[Y > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ est une loi géométrique (on pourra exprimer $P[Y = k]$ en fonction de $P[Y > k]$ et de $P[Y > k - 1]$) : 1pt.
- Montrer qu'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p vérifie la propriété suivante (on dit que cette loi est "sans mémoire") : 1pt

$$P[X > k + l|X > l] = P[X > k], \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2.$$

- Inversement, on considère une variable aléatoire Y de loi discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ..., \}$ qui est sans mémoire, i.e., qui vérifie

$$P[Y > k + l|Y > l] = P[Y > k], \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2.$$

  On pose $p = P[Y = 1]$.

  - Déterminer $P[Y > 1]$, puis $P[Y > 2]$: 0.5pt + 0.5pt
  - En déduire que

$$P[Y > k] = q^k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

    0.5 pt
  - Que peut-on en conclure ? 0.5 pt

Exercice 2: Couple de variables aléatoires uniformes corrélées (5 **points)**

1. Vérifier que p_a est une densité de probabilité pour toute valeur de $a \in]-1, +1[$. On admettra que $|(1-2x)(1-2y)| \leq 1, \forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$: 1pt pour la vérification que l'intégrale de la densité vaut 1 pour tout a et 1pt de bonus pour ceux qui ont démontré que l''expression de $p_a(x, y)$ est positive $\forall x, \forall y$.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y : 1pt.
3. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (X, Y) : 2pts = 1pt pour E[XY], 0.5 pt pour cov(X,Y), 0.5 pt pour $r_{X,Y}$.
4. En prenant soin de justifier votre réponse, déterminer la ou les les valeur(s) de a pour lesquelles les variables aléatoires X et Y sont indépendante : 1pt : 0.5pt pour $a = 0$ seule valeur possible pour laquelle X et Y sont indépendantes, 0.5 pt X et Y sont effectivement indépendantes pour $a = 0$.

Exercice 3 : Changement de variables continues (5 **points)**

1. Déterminer la loi du couple (T, U) lorsque $T = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ et $U = -\frac{1}{\mu} \ln Y$ avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ = 2pts : 0.5pt pour bijection + 0.5 pt pour Jacobien + 0.5pt pour densité de (T, U) + 0.5pt pour domaine
2.
   - Quelles sont les lois marginales de T et de U ? : 2pt (0.5 pt pour domaine + 0.5 point pour la densité pour chaque loi)
   - Pour quelle valeur de a les variables T et U sont-elles indépendantes ? : 1pt

Exercice 4 : Méthode Delta (5 **points)**

1. Déterminer la moyenne et la variance de X_i : 0.5pt pour moyenne et 0.5pt pour variance (avec tables ou par calcul)

2. Quelle est la loi approchée pour n “grand” de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ issue de l’application du théorème de la limite centrale ? : 1pt
   Quelle est la loi asymptotique de $U_n = \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$ lorsque $n \to \infty$: 1pt

3. Loi approchée de $Y_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ = 1pt et loi approchée de $Z_n = \exp\left(\bar{X}_n\right)$: 1pt

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	$\mathbf{m}$	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\boldsymbol{\Sigma})}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)