EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 24 Octobre 2022 (8h-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: (9 points)

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité

$$p(x,y) = \begin{cases} 2\lambda^2 \exp(-\lambda y) \text{ si } y > 2x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction gamma est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

avec $\Gamma(n) = (n-1)!$

1. (2pts) Montrer que les lois marginales de X et de Y sont des lois gamma dont on précisera les paramètres.
D'après la forme du domaine du couple (X, Y), les variables aléatoires X et Y sont toutes deux à valeurs dans $]0, +\infty[$. De plus

$$p(x,.) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dy = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \int_{2x}^{+\infty} 2\lambda^2 e^{-\lambda y} dy \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$p(x,.) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 2\lambda e^{-2\lambda x} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

C'est une loi gamma $\Gamma(1, 2\lambda)$ appelée aussi loi exponentielle de paramètre 2λ. La loi de Y est de densité

$$p(.,y) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq 0 \\ \int_0^{\frac{y}{2}} 2\lambda^2 e^{-\lambda y} dx \text{ si } y > 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$p(x,.) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq 0 \\ \lambda^2 y e^{-\lambda y} \text{ si } y > 0. \end{cases}$$

C'est une loi gamma $\Gamma(2, \lambda)$.

2. (2pts) Déterminer la covariance du couple (X, Y).
La covariance du couple (X, Y) est définie par $\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$. Les moyennes de X et de Y se déterminent à l'aide des tables : $E[X] = \frac{2}{\lambda}$ et $E[Y] = \frac{1}{2\lambda}$. Le moment d'ordre deux $E[XY]$ peut se déterminer de deux manières différentes

- Première méthode
  On a

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^{+\infty} \int_{2x}^{+\infty} 2\lambda^2 x y e^{-\lambda y} dy dx \\
&= \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 x \left[\int_{2x}^{+\infty} y e^{-\lambda y} dy \right] dx.
\end{aligned}
$$

  L'intégrale par rapport à y peut se calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$
\int y e^{-\lambda y} dy = -\frac{y}{\lambda} e^{-\lambda y} + \int \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} dy = -\frac{y}{\lambda} e^{-\lambda y} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda y}.
$$

  Donc

$$
I_x = \int_{2x}^{+\infty} y e^{-\lambda y} dy = \frac{2x}{\lambda} e^{-2\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-2\lambda x}.
$$

  On a alors

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 x \left[\int_{2x}^{+\infty} y e^{-\lambda y} dy \right] dx \\
&= \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 x \left[\frac{2x}{\lambda} e^{-2\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-2\lambda x} \right] dx
\end{aligned}
$$

  En faisant le changement de variables $u = 2\lambda x$, on obtient

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 x \left[\frac{2x}{\lambda} e^{-2\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-2\lambda x} \right] dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda u \left[\frac{u}{\lambda^2} e^{-u} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-u} \right] \frac{1}{2\lambda} du \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda^2} \Gamma(3) + \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(2) \right] \\
&= \frac{3}{2\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

- Deuxième méthode
  Il est plus simple de commencer à intégrer par rapport à la variable x

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{y}{2}} 2\lambda^2 x y e^{-\lambda y} dx dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2}{4} y^3 e^{-\lambda y} dy \\
&= \frac{1}{4\lambda^2} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du \\
&= \frac{1}{4\lambda^2} \Gamma(4) = \frac{3}{2\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

On en conclut

$$
\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{3}{2\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda^2}.
$$

3. (4 pts) Quelle est la loi du couple (T, U) avec $T = 2X - Y$ et $U = X$? En déduire la loi de T.
Le changement de variables est clairement bijectif car

$$\left\{ \begin{array}{c} T = 2X - Y \\ U = X \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = U \\ Y = 2U - T \end{array} \right.$$

Le Jacobien du changement de variables est

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \\ \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial U} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1.$$

On en déduit la densité du couple (T, U) :

$$\boxed{g(t, u) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(2u-t)} I_\Delta(t, u)}$$

où Δ est le domaine de définition du couple (T, U) qu'il convient de déterminer. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

$$\left\{ \begin{array}{c} x > 0 \\ y > 2x \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u > 0 \\ t < 0 \end{array} \right.$$

On en déduit la loi marginale de T

$$g(t, .) = \int_{\mathbb{R}} g(t, u) du = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } t \geq 0 \\ \\ \int_0^{+\infty} 2\lambda^2 e^{-\lambda(2u-t)} du \text{ si } t < 0. \end{array} \right.$$

soit

$$g(t, .) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } t \geq 0 \\ \\ \lambda e^{\lambda t} \text{ si } t < 0. \end{array} \right.$$

4. (1pt) Les variables T et U sont-elles indépendantes ?
La densité de $U = X$ est

$$g(., u) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } u \leq 0 \\ \\ 2\lambda e^{-2\lambda u} \text{ si } u > 0. \end{array} \right.$$

Donc

$$g(t, u) = g(t, .)g(., u), \forall (t, u)$$

Les variables T et U sont donc indépendantes.

Exercice 2: Vecteurs Gaussiens (5 points)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m} = (0, 0, 0)^T$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ définie comme suit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

1. (2pts) On pose $U = X_1$ et $V = X_2 - aX_1$, où $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi du couple (U, V) ? Pour quelle valeur de a les variables U et V sont-elles indépendantes (justifier avec soin votre réponse).
Réponse : Le couple (U, V) est lié à $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ par la transformation

$$\left(\begin{array}{c} U \\ V \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \right)$$

Donc, d'après les résultats du cours, on a

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{M})$$

avec

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2-2a \\ 2 & 5-2a \\ 0 & 1a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2-2a \\ 2-2a & 5-4a+2a^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On notera que ces résultats s'appliquent car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Puisque (U, V) est un vecteur Gaussien, les variables U et V sont indépendantes si et seulement si $\text{cov}(U, V) = 0$, c'est-à-dire si

$$a = 1.$$

2. (3pts) Déterminer les densités de X_1 et du couple de (X_1, X_2). En déduire que la loi de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est une loi normale dont on précisera la moyenne et la variance. On rappelle le résultat suivant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Réponse : En observant la loi de $\boldsymbol{X}$, on en déduit

$$\begin{aligned}
X_1 &\sim \mathcal{N}(0, 2) \\
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$f(x_1, ., .) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$\det(A) = 6 \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, .) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1, x_2) A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{1}{12}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{1}{12}\left(5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2\right)\right)
\end{aligned}$$

La loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est donc une loi normale de densité

$$\begin{aligned} f\left(x_2 \middle| x_1\right) &= \frac{f(x_1, x_2, .)}{f(x_1, ., .)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{1}{12}\left(5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2\right)\right)}{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{1}{6}\left(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{1}{6}\left(x_2 - x_1\right)^2\right) \end{aligned}$$

On reconnait une loi normale de moyenne x_1 et de variance 3, i.e.,

$$X_2 | X_1 = x_1 \sim \mathcal{N}(x_1, 3).$$

Exercice 3 : lois binomiales corrélées (6 points)

Soient X, Y et Z, trois variables aléatoires indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(m,p)$, $\mathcal{B}(n-m,p)$ et $\mathcal{B}(n-m,p)$ avec $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > m$ et $p \in]0,1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X + Z$.

1. (1pt) Déterminer les fonctions caractéristiques de U et V et en déduire que ces deux variables suivent la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
   En utilisant l'indépendance entre les variables X, Y et Z, on obtient

   $$\phi_U(t) = E\left[e^{iUt}\right] = E\left[e^{i(X+Y)t}\right] = E\left[e^{iXt}\right] E\left[e^{iYt}\right] = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

   En utilisant les tables de lois, on obtient

   $$\phi_U(t) = \left(pe^{it} + q\right)^m \times \left(pe^{it} + q\right)^{n-m} = \left(pe^{it} + q\right)^n$$

   avec $q = 1 - p$. Donc U suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Avec une démarche similaire, V suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

2. (2pts) Montrer que la covariance du couple (U,V) est égale à la variance de X. En déduire le coefficient de corrélation du couple (U,V) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
   La covariance du couple (U,V) est définie par

   $$\text{cov}(U,V) = E[UV] - E[U]E[V] = E[(X+Y)(X+Z)] - E[X+Y]E[X+Z],$$

   d'où en développant et en utilisant l'indépendance entre les variables X, Y et Z

   $$\text{cov}(U,V) = E[X^2] - E^2[X] = \text{var}(X) = mpq.$$

   Le coefficient de corrélation du couple (U,V) s'écrit

   $$\rho_{U,V} = \frac{\text{cov}(U,V)}{\sqrt{\text{var}(U)\text{var}(V)}} = \frac{mpq}{\sqrt{npq \times npq}} = \frac{m}{n}.$$

   Comme $\text{cov}(U,V) \neq 0$, les variables U et V ne sont pas indépendantes.

3. (3pts) Montrer que la probabillité $P[U=k,V=l]$ peut se mettre sous la forme

$$P[U=k,V=l]=\sum_{i=0}^{\min\{k,l\}}\binom{n-m}{k-i}\binom{n-m}{l-i}\binom{m}{i}p^{k+l-i}q^{2n-k-m-l+i}$$

avec $q=1-p$ et $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (on pourra utiliser le théorème des probabilités totales).
On a

$$\begin{aligned}P[U=k,V=l]&=\sum_{i\in\mathbb{N}}P[U=k,V=l,X=i]\\&=\sum_{i\in\mathbb{N}}P[X+Y=k,X+Z=l|X=i]P[X=i]\\&=\sum_{i\in\mathbb{N}}P[Y=k-i,Z=l-i]P[X=i].\end{aligned}$$

Comme les variables Y et Z sont indépendantes, on obtient

$$P[U=k,V=l]=\sum_{i\in\mathbb{N}}P[Y=k-i]P[Z=l-i]P[X=i]$$

soit

$$\begin{aligned}P[U=k,V=l]&=\sum_{i=0}^{\min\{k,l\}}\binom{n-m}{k-i}p^{k-i}q^{n-m-k+i}\binom{n-m}{l-i}p^{l-i}q^{n-m-l+i}\binom{m}{i}p^iq^{m-i}\\&=\sum_{i=0}^{\min\{k,l\}}\binom{n-m}{k-i}\binom{n-m}{l-i}\binom{m}{i}p^{k+l-i}q^{2n-k-m-l+i}.\end{aligned}$$

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}, , C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)