CORRECTION EXAMEN PROBABILITÉS - 1HY

... Novembre 2018 (8h-9h45)

Ex1

1) $\phi_Z(t) = E[e^{itZ}] = E[e^{itX_1} \, e^{itX_2}] \underset{\substack{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ind} \\ \text{donc } e^{itX_1} \text{ et } e^{itX_2} \text{ ind}}}{=} \phi_{X_1}(t)\,\phi_{X_2}(t)$

En utilisant les tables, on obtient $\phi_{X_1}(t) = \exp[\lambda_1(e^{it}-1)]$ et $\phi_{X_2}(t) = \exp[\lambda_2(e^{it}-1)]$ d'où

$$\phi_Z(t) = \exp[(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)]$$

Comme la fonction caractéristique caractérise la loi de Z, on a

1pt $\boxed{Z \sim P(\lambda_1+\lambda_2)}$

Par symétrie $\boxed{T \sim P(\lambda_2+\lambda_3)}$

2) $\text{cov}(Z,T) = E[ZT] - E[Z]E[T]$

$= E[(X_1+X_2)(X_2+X_3)] - (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)$

En utilisant l'indépendance mutuelle de X_1, X_2 et X_3 on en déduit

$$\text{cov}(Z,T) = E[X_1]E[X_2] + E(X_1X_3) + E(X_2^2) + E(X_2)E(X_3) - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_3$$

$$= E(X_2^2) - \lambda_2^2 = E[X_2^2] - E^2(X_2) = \text{Var}\, X_2$$

donc $\boxed{\text{cov}(Z,T) = \text{Var}\, X_2 = \lambda_2}$

1pt

le coefficient de corrélation est

$$r(X,Y) = \frac{\text{cov}(Z,T)}{\sqrt{\text{Var}Z \,\text{Var}T}} = \boxed{\frac{\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)}}}$$

1pt

2) $cov(Z,T) = \lambda_2 \neq 0$ d'après la question précédente
donc les variables aléatoires Z et T ne sont pas indépendants

(1pt)

(en effet Z, T ind $\Rightarrow cov(Z,T) = 0$ donc par contraposée
$cov(Z,T) \neq 0 \Rightarrow Z$ et T non ind)

L'intérêt de cet exercice est de proposer une méthode permettant de générer deux variables aléatoires de lois de Poisson ayant une covariance positive donnée (égale à λ_2), i.e., deux variables aléatoires de lois de Poisson corrélées

(1pt)

Ex2

1) Le couple (X,Y) possède la densité

$$p(x,y) \underset{\uparrow}{=} p(x,\cdot) \times p(\cdot,y) = \boxed{\begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } (x,y) \in]-1,+1[\times]-1,+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

indépendance de X et Y

(1pt)

2) $\begin{cases} Z = \frac{Y}{X} \\ T = X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = T \\ Y = ZT \end{cases}$ le changement de variables est donc bijectif (0,5pt)

Jacobien $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & T \\ 1 & Z \end{vmatrix} = -T$

donc $\boxed{|J| = |T|}$ (1pt)

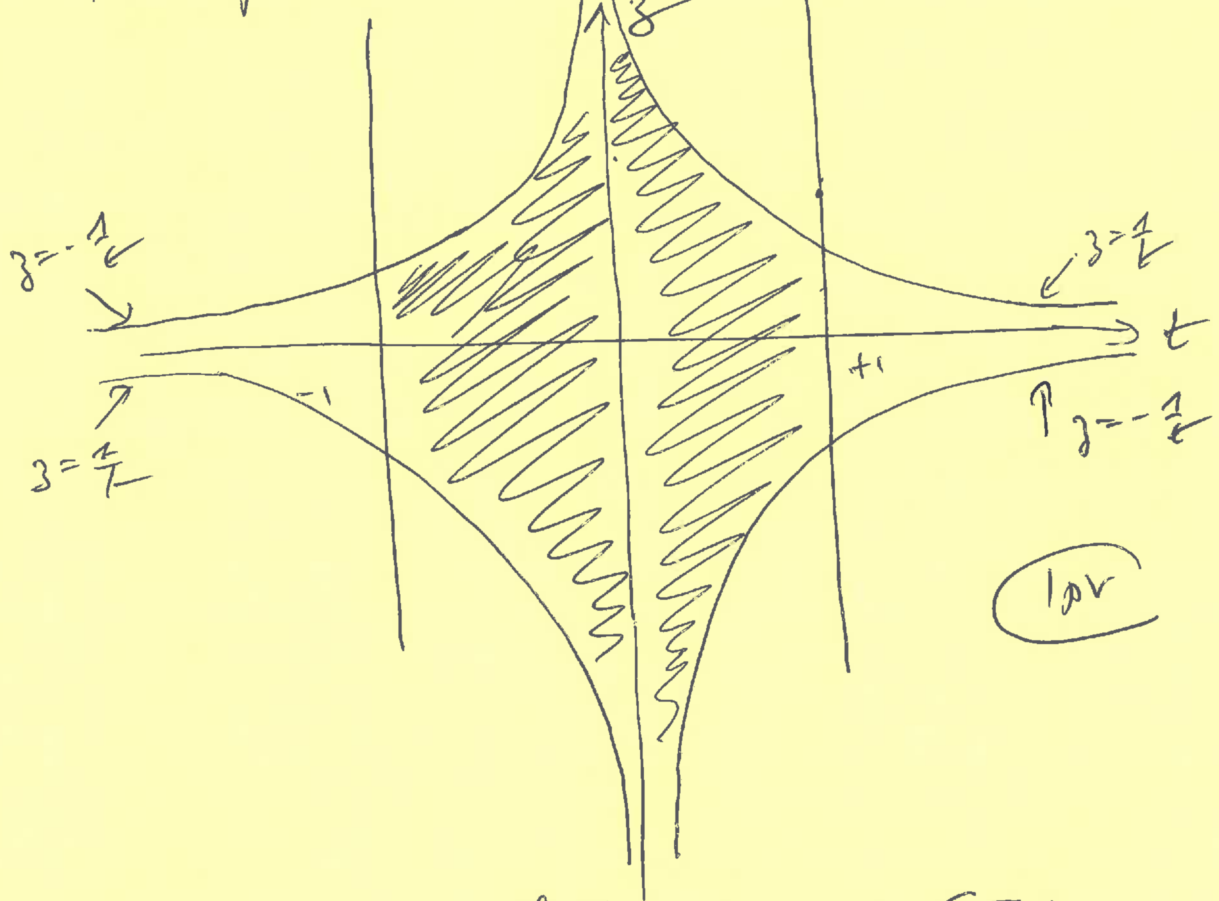
Domaine de définition de (Z,T)

On a $\begin{cases} -1 \leq X \leq 1 \\ -1 \leq Y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq T \leq +1 \\ -1 \leq ZT \leq +1 \end{cases}$ (2pts)

c'est à dire

$\left\{ \boxed{T \in]0,1] \ , \ Z \leq \frac{1}{T}, \ Z \geq -\frac{1}{T}} \right\} \cup \left\{ T \in]-1,0[\ , \ Z \leq -\frac{1}{T}, \ Z \geq \frac{1}{T} \right\}$

Ce qui se représente comme suit



▨ Domaine de définition du couple (Z,T)

Densité du couple (Z,T)

$$\boxed{\varphi(z,t) = \begin{cases} \frac{|t|}{4} & (z,t) \in \Delta \\ 0 & (z,t) \notin \Delta \end{cases}}$$

0,5

3) La loi marginale de Z est définie par

$$q(z,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} q(z,t)\,dt$$

On voit sur le graphique précédent que Z est définie sur $\mathbb{R}^2$

et que
$$q(z,\cdot) = \int_{-1}^{1} \frac{|t|}{4}\,dt \quad \text{si } z \in [0,1]$$

$$q(z,\cdot) = \int_{-\frac{1}{z}}^{1/z} \frac{|t|}{4}\,dt \quad \text{si } z > 1$$

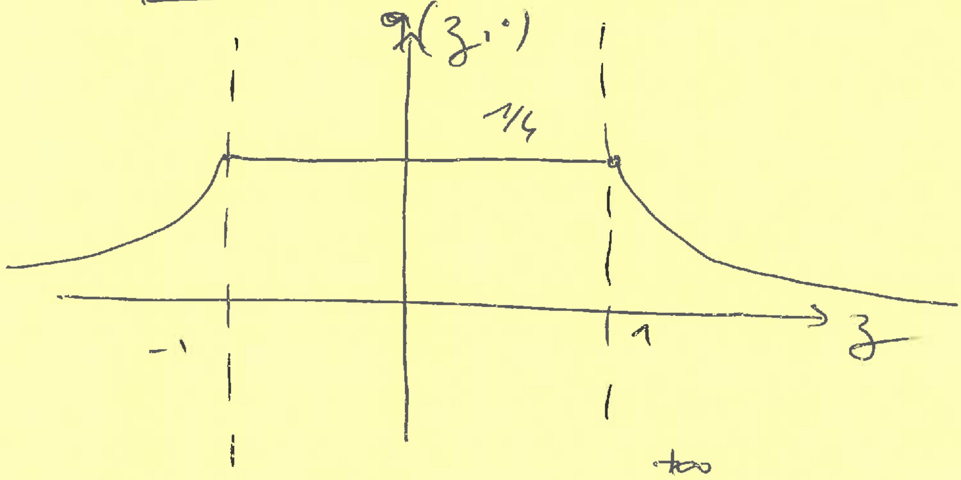
$$q(z,\cdot) = \int_{-1}^{+1} \frac{|t|}{4}\,dt \quad \text{si } z \in [-1,0]$$

$$q(z,\cdot) = \int_{\frac{1}{z}}^{-1/z} \frac{|t|}{4}\,dt \quad \text{si } z < -1$$

Les calculs sont élémentaires et conduisent à

$$\boxed{q(z,\cdot) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } z \in [-1,+1] \\ \frac{1}{4z^2} & \text{si } |z| \geq 1 \end{cases}}$$

2pts



0,5 pt

$$\int q(z,\cdot)\,dz = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}\,dz + 2\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{4z^2}\,dz$$

0,5 pt

$$= \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z}\right]_1^{+\infty} = 1$$

4) $\mathrm{cov}(Z,T) = E[ZT] - E[Z]E[T]$

$$= E\left[\frac{Y}{X}X\right] - E\left[\frac{Y}{X}\right]E(X)$$

ind de X et Y $\quad = E(Y) - E(Y)E\left(\frac{1}{X}\right)E(X)$

Comme X et Y sont de moyennes nulles, on obtient

$$\boxed{\mathrm{cov}(Z,T) = 0}$$

1 pt

et pourtant Z et T ne sont pas indépendantes car le domaine de définition du couple n'est pas une réunion de pavés 1 pt

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m} = (0,0,0)^T$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ définie comme suit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. On pose $U = X_1$ et $V = X_2 - aX_1$, où $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi du couple (U,V) ? Pour quelle valeur de a les variables U et V sont-elles indépendantes (justifier avec soin votre réponse).
   Réponse : Le couple (U,V) est lié à $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ par la transformation

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

   Donc, d'après les résultats du cours, on a

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{M})$$

   avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2-2a \\ 2 & 5-2a \\ 0 & 1a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2-2a \\ 2-2a & 5-4a+2a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   On notera que ces résultats s'appliquent car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Puisque (U,V) est un vecteur Gaussien, les variables U et V sont indépendantes si et seulement si $\text{cov}(U,V) = 0$, c'est-à-dire si

$$a = 1.$$

2. Déterminer les densités de X_1 et du couple de (X_1, X_2). En déduire que la loi de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est une loi normale dont on précisera la moyenne et la variance. On rappelle le résultat suivant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

   Réponse : En observant la loi de $\boldsymbol{X}$, on en déduit

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \mathcal{N}(0,2) \\ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$f(x_1,.,.) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$\det(A) = 6 \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,.) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1,x_2)\, A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{1}{12}(x_1,x_2) \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{1}{12}\left(5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2\right)\right) \end{aligned}$$

La loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est donc une loi normale de densité

$$\begin{aligned} f\left(x_2 | \, x_1\right) &= \frac{f(x_1,x_2,.)}{f(x_1,.,.)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)}{\frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{1}{12}\left(5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2\right)\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{1}{6}\left(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{1}{6}\left(x_2 - x_1\right)^2\right) \end{aligned}$$

On reconnait une loi normale de moyenne x_1 et de variance 3, i.e.,

$$X_2 | \, X_1 = x_1 \sim \mathcal{N}(x_1, 3).$$