EXAMEN PROBABILITÉ 1MF2E

Lundi 17 novembre 2025

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Changement de variables continues (8 points)

On considère un couple de deux variables aléatoires X et Y de de densité

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{xy}} \text{ si } 0 < y < x < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   La loi marginale de X est définie par la densité :

   $$p(x,.) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{xy}}dy \text{ si } x \in]0,1/2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   soit

   $$p(x,.) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in]0,1/2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   X suit donc la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1/2[$.
   La loi marginale de Y est définie par la densité

   $$p(.,y) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^{1/2} \frac{1}{\sqrt{xy}}dx \text{ si } y \in]0,1/2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   soit

   $$p(.,y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{y}} - 2 \text{ si } y \in]0,1/2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. On définit les deux variables aléatoires $Z = X$ et $T = \frac{Y}{X}$. Quelle est la loi du couple (Z,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
   Le changement de variables est clairement bijectif car

   $$\begin{cases} Z = X \\ T = \frac{Y}{X} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = Z \\ Y = ZT \end{cases}$$

   Le Jacobien du changement de variables est

   $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & T \\ 0 & Z \end{vmatrix} = Z.$$

   On en déduit la densité du couple (Z,T) :

   $$\boxed{g(z,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} I_{\Delta}(z,t)}$$

   où Δ est le domaine de définition du couple (Z,T) qu'il convient de déterminer. Pour déterminer ce domaine, on peut faire comme suit

   $$\begin{cases} 0 < y \\ y < x \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < zt \\ zt < z \\ z < \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z > 0, t > 0 \\ t < 1 \\ z < \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < z < \frac{1}{2} \\ 0 < t < 1 \end{cases}$$

3. Déterminer la loi marginale de T et montrer que c'est une loi beta dont on déterminera les paramètres. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
La loi marginale de T est définie par la densité :

$$g(.,t) = \int_{\mathbb{R}} g(z,t)dz = \begin{cases} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}dz \text{ si } t \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

soit

$$g(.,t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ si } t \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

X suit donc la loi beta $B\left(\frac{1}{2},1\right)$. On vérifie que

$$g(z,t) = g(z,.)g(.,t), \forall (z,t),$$

car $g(z,.)$ est la densité de $Z = X$ qui est une loi uniforme sur l'intervalle $]0,1/2[$. Les deux variables Z et T sont donc indépendantes.

4. Déterminer la covariance du couple (X,Y).
La covariance du couple (X,Y) est définie par

$$\text{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

La moyenne d'une loi uniforme sur $]0,1/2[$ est

$$E[X] = \frac{1}{4}.$$

De plus

$$E[T] = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} \times t dt = \frac{1}{3}.$$

Donc

$$E[Y] = E[ZT] = E[Z]E[T] = \frac{1}{12}.$$

Remarque : On aurait aussi pu calculer directement

$$E[Y] = \int_0^{\frac{1}{2}} y\left(\sqrt{\frac{2}{y}} - 2\right)dy$$

mais le calcul est légèrement plus compliqué.
Pour terminer, nous devons déterminer

$$E[XY] = E[Z^2T] = E[Z^2]E[T] = \left(\text{var}(Z) + E^2[Z]\right)E[T],$$

soit

$$E[XY] = \left[\frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right] \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}.$$

On en conclut

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{144}.$$

5. Déterminer la loi conditionnelle de $Y|X$ et sa moyenne $E[Y|X]$. En déduire $E[Y]$ en utilisant le théorème des espérances conditionnelles.
La loi conditionnelle de $Y|X$ admet la densité
$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x,.)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{xy}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}$$
qui est définie sur le domaine $0 < y < x < \frac{1}{2}$. Sa moyenne est
$$E[Y|X] = \int_0^x y\frac{1}{2\sqrt{xy}}dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x \sqrt{y}dy = \frac{x}{3}.$$
En utilisant le théorème des espérances conditionnelles, on obtient
$$E[Y] = E[E[Y|X]] = E\left[\frac{X}{3}\right] = \frac{1}{3}E[X] = \frac{1}{12}.$$

Exercice 2 : Théorème central limite (5 points)

On considère une variable aléatoire continue X de densité
$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} \text{ si } x \in]0,\theta[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
avec $\theta > 0$.

1. Déterminer la loi de la variable $Y = \frac{X}{\theta}$ et en déduire à l'aide des tables la moyenne et la variance de la variable aléatoire X.
En faisant un changement de variables (sans oublier le Jacobien ;-)), on obtient la densité de Y :
$$\pi(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ si } y \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
On reconnait une loi beta de $B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ de moyenne $E[Y] = \frac{1}{3}$ et de variance $\text{var}(Y) = \frac{4}{45}$. On en déduit
$$E[X] = \frac{\theta}{3} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{4\theta^2}{45}.$$

2. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ de même loi que X et on construit la variable aléatoire
$$Y_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$
Déterminer la moyenne et la variance de Y_n et sa loi limite issue du théorème central limite. En déduire que $\sqrt{n}(Y_n - \theta)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale dont on précisera les paramètres.
Des calculs élémentaires permettent d'obtenir
$$E[Y_n] = \theta \text{ et } \text{var}[Y_n] = \frac{4\theta^2}{5n}.$$
Comme les variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$ sont indépendantes et de même loi (de moyenne et de variance finies), on peut appliquer le théorème central limite. Pour n grand, on peut donc approcher la loi de Y_n par une loi normale $\mathcal{N}\left(\theta, \frac{4\theta^2}{5n}\right)$. Donc on peut approcher la loi de $\sqrt{n}(Y_n - \theta)$ par une loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{4\theta^2}{5}\right)$ et $\sqrt{n}(Y_n - \theta)$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{4\theta^2}{5}\right)$.

Exercice 3 : Lois binomiales corrélées (7 points)

On considère trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 et X_3 de même loi binomiale $B(n,p)$ et on construit les deux variables aléatoires $Z = X_1 + X_2$ et $T = X_1 + X_3$.

1. Montrer que les lois de Z et T sont également des lois binomiales dont on déterminera les paramètres.
   Le plus simple est de déterminer les fonctions caractéristiques des variables Z et T :
   $$\phi_Z(t) = E[e^{itZ}] = E[e^{itX_1}]E[e^{itX_2}] = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_1}(t).$$
   Les tables permettent d'obtenir
   $$\phi_Z(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n \times \left(pe^{it} + q\right)^n = \left(pe^{it} + q\right)^{2n}$$
   qui est la fonction caractéristique d'une loi binomiale $B(2n,p)$. Donc $Z \sim B(2n,p)$. De la même façon
   $$\phi_T(t) = E[e^{itZ}] = E[e^{itX_1}]E[e^{itX_3}] = \left(pe^{it} + q\right)^{2n},$$
   donc $T \sim B(2n,p)$.

2. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (Z,T).
   La covariance de (Z,T) vérifie
   $$\text{cov}(Z,T) = E[ZT] - E[Z]E[T] = E[(X_1 + X_2)(X_1 + X_3)] - E[X_1 + X_2]E[X_1 + X_3].$$
   Des calculs élémentaires permettent d'obtenir
   $$\text{cov}(Z,T) = E[X_1^2] - E^2[X_1] = \text{var}(X_1) = npq.$$
   Le coefficient de corrélation du couple (Z,T) est donc
   $$\rho_{Z,T} = \frac{\text{cov}(Z,T)}{\sqrt{\text{var}(Z)\text{var}(T)}} = \frac{npq}{2npq} = \frac{1}{2}.$$

3. Déterminer la probabilité conditionnelle $P[Z = k, T = l | X_1 = m]$ en précisant les valeurs possibles de m et de (k,l). En déduire le résultat suivant
   $$P[Z = k, T = l] = \sum_{m=0}^{\min(k,l)} \binom{n}{k-m}\binom{n}{l-m}\binom{n}{m} p^{k+l-m} q^{3n+m-k-l},$$
   avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
   Comme X_1 suit la loi binomiale $B(n,p)$, cette probabilité n'a de sens que si $m \in \{0, ..., n\}$. De plus
   $$P[Z = k, T = l | X_1 = m] = P[X_1 + X_2 = k, X_1 + X_3 = l | X_1 = m] = P[X_2 = k - m, X_3 = l - m].$$
   En utilisant l'indépendance des variables X_2 et X_3, on obtient :
   $$P[Z = k, T = l | X_1 = m] = P[X_2 = k - m]P[X_3 = l - m].$$
   Pour que ces deux probabilités soient non nulles, il faut $m \leq k$ et $m \leq l$, et on a
   $$P[Z = k, T = l | X_1 = m] = \binom{n}{k-m} p^{k-m} q^{n-k+m} \binom{n}{l-m} p^{l-m} q^{n-l+m}.$$

On en déduit

$$P[Z=k,T=l]=\sum_m P[Z=k,T=l,X_1=m]=\sum_m P[Z=k,T=l|X_1=m]P[X_1=m].$$

On en conclut

$$P[Z=k,T=l]=\sum_{m=0}^{\min(k,l)}\binom{n}{k-m}p^{k-m}q^{n-k+m}\binom{n}{l-m}p^{l-m}q^{n-l+m}\binom{n}{m}p^m q^{n-m}$$

soit

$$P[Z=k,T=l]=\sum_{m=0}^{\min(k,l)}\binom{n}{k-m}\binom{n}{l-m}\binom{n}{m}p^{k+l-m}q^{3n+m-k-l}.$$

4. On suppose dans cette question que $n=2$. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $U=Z-T$ et montrer qu'elle s'écrit

$$\Phi_U(t)=\sum_{k=-2}^{2}p_k e^{ikt}, t\in\mathbb{R}.$$

En déduire que U est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-2,-1,0,+1,+2\}$ et déterminées les probabilités associées.
La fonction caractéristique de U s'écrit

$$\phi_U(t)=E[e^{itU}]=E[e^{it(Z-T)}]=E[e^{it(X_2-X_3)}].$$

En utilisant l'indépendance entre X_2 et X_3, on obtient

$$\phi_U(t)=\phi_{X_2}(t)\phi_{X_3}(-t)=\left(pe^{it}+q\right)^2\left(pe^{-it}+q\right)^2,$$

soit, en développant

$$\phi_U(t)=p^4+4p^2q^2+q^4+2pq(p^2+q^2)[e^{it}+e^{-it}]+(p^2q^2)[e^{2it}+e^{-2it}].$$

On en déduit

$$P[U=-2]=P[U=2]=p^2q^2,$$
$$P[U=-1]=P[U=1]=2pq(p^2+q^2),$$
$$P[U=0]=p^4+q^4+4p^2q^2.$$

On peut vérifier que la somme de ces probabilités est

$$2p^2q^2+4pq(p^2+q^2)+p^4+q^4+4p^2q^2=(p^2+q^2+2pq)^2=1.$$

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1}...p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géometrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	Expression compliquée
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = Ke^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)$	$f(x) = ke^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = kx^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},\ \Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	Expression compliquée
Pareto $P(a,b)$	$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]a,+\infty[$	$\frac{ab}{b-1}$	$\frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$	Expression compliquée