EXAMEN PROBABILITÉS/STATISTIQUE - 2GEA

Mercredi 5 Novembre 2014 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Probabilités (9 points)

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité de probabilité

$$p(x,y) = \begin{cases} \theta^2 e^{-\theta x} \text{ si } x \geq y \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les densités marginales de X et Y et indiquer les lois obtenues en s'aidant des tables de lois. En déduire les moyennes $E[X], E[Y]$ et les variances $\text{Var}[X], \text{Var}[Y]$. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

2. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X - Y$ et $T = Y$. En déduire la loi de Z puis la loi de $U = Z^2$.

3. Les variables aléatoires Z et T sont elles indépendantes ? Déterminer la covariance du couple (Z, T) puis celle du couple (X, Y).

4. Déterminer la fonction caractéristique de $X = Z + T$. En s'aidant des tables de lois, retrouver la loi déterminée à la première question.

Exercice 2: Estimation (5 points)

On considère une suite de variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On cherche à estimer le paramètre $\theta = \sigma^2$ à l'aide des variables aléatoires X_i.

1. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\hat{\theta}_{\text{MV}}$? Est-il sans biais ? convergent ?

2. Déterminer la borne de Cramér-Rao pour les estimateurs non-biaisés de θ. L'estimateur $\hat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?

3. Déterminer un estimateur des moments du paramètre θ construit avec les variables aléatoires X_i.

Exercice 3: Test statistique (6 points)

On considère une suite de variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On désire tester les deux hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : \lambda = \lambda_1 \text{ (avec } \lambda_1 < \lambda_0) \end{cases}$$

1. Vérifier que la statistique du test de Neyman-Pearson peut s'écrire $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et déterminer la région critique associée.

2. Déterminer la fonction caractéristique de T et en déduire que T suit une loi de Poisson que l'on précisera sous chaque hypothèse. Expliquer pourquoi il est fastidieux de déterminer le seuil du test de Neyman-Pearson à l'aide de la loi de T sous l'hypothèse H_0.

3. Pour éviter les problèmes liés à la loi de Poisson, on suppose que n est suffisamment grand pour pouvoir utiliser le théorème de la limite centrale.

   - Donner la loi approchée de T issue de ce théorème.
   - Quelle est la valeur du seuil obtenue lorsqu'on confond la loi de T avec son approximation ?
   - Déterminer les courbes COR (caractéristiques opérationnelles du récepteur) découlant de cette loi approchée. On posera

     $$\Phi\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

     et on notera $\Phi^{-1}(x)$ son inverse. Déterminer les paramètres qui influent sur la performance du test.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1}...p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES
$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in \left]a, b\right[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in \left]0, 1\right[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)