EXAMEN PROBABILITÉS/STATISTIQUE - 2GEA

Jeudi 12 Novembre 2015

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Probabilités (10 points)

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité de probabilité

$$p(x,y) = \begin{cases} A \text{ si } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq x^2 \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où A est constante positive.

1. Montrer que $A = 3$.
2. Déterminer les densités marginales de X et Y. En déduire (en s'aidant lorsque cela est possible des tables de lois) les moyennes $E[X], E[Y]$ et les variances $\text{Var}[X], \text{Var}[Y]$. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
3. Quelle est la loi conditionnelle de $Y|X = x$?
4. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = \frac{Y}{X^2}$ et $T = X$. En déduire les lois marginales de Z et de T. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2: Estimation (6 points)

On considère une suite de variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ définie par

$$P[X = x_i] = p(1-p)^{x_i - 1}, \quad x_i = 1, 2, ...$$

On admettra qu'une telle loi est de moyenne $E[X_i] = \frac{1}{p}$ et de variance $\text{Var}(X_i) = \frac{q}{p^2}$ avec $q = 1 - p$.

1. Déterminer la vraisemblance de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ et montrer qu'elle admet un maximum global unique par rapport à une valeur de p que l'on précisera. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p noté $\hat{p}_{\text{MV}}$.
2. En utilisant l'expression de $E[X_i]$, donner un estimateur des moments de p noté $\hat{p}_{\text{Mo}}$.
3. Devant la difficulté d'étudier les performances des estimateurs $\hat{p}_{\text{MV}}$ et $\hat{p}_{\text{Mo}}$, on se propose d'estimer le paramètre $a = \frac{1}{p}$ à l'aide de de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a noté $\hat{a}_{\text{MV}}$? Cet estimateur est-il sans biais et convergent ?
4. Déterminer la borne de Cramér-Rao pour les estimateurs non-biaisés de a. L'estimateur $\hat{a}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre a ?

Exercice 3: Test statistique (4 points)

On considère une suite de variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ définie par

$$P[X = x_i] = p(1-p)^{x_i - 1}, \quad x_i = 1, 2, ...$$

On admettra qu'une telle loi est de moyenne $E[X_i] = \frac{1}{p}$ et de variance $\text{Var}(X_i) = \frac{q}{p^2}$ avec $q = 1 - p$. On désire tester les deux hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p = p_1 \text{ (avec } \quad p_1 > p_0) \end{cases}$$

1. Vérifier que la statistique du test de Neyman-Pearson peut s'écrire $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et déterminer la région critique associée.

2. On suppose que n est suffisamment grand pour pouvoir utiliser le théorème de la limite centrale.

   - Donner la loi approchée de T issue de ce théorème.
   - Déterminer les risques de première et de seconde espèce α et β en fonction du seuil du test noté K_α (et de n, p_0 et p_1) lorsqu'on confond la loi de T avec son approximation issue du théorème de la limite centrale.
   - En déduire les courbes COR de ce problème de détection. On posera

     $$\Phi\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

     et on notera $\Phi^{-1}(x)$ son inverse. Déterminer les paramètres qui influent sur la performance du test.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES
$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique
$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	$\mathbf{m}$	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1 + t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1 - 2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)