EXAMEN PROBABILITÉS/STATISTIQUE - 2GEA

Vendredi 17 Novembre 2017

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (5 points)

On considère une variable aléatoire X continue de densité de probabilité

$$p(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$ en effectuant un changement de variables et reconnaître cette loi dans la table de lois.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X. En déduire la fonction de répartition de Y et retrouver le résultat de la première question.
3. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire Y en utilisant la loi de X. En utilisant les tables de lois, montrer qu'on peut retrouver la loi de Y trouvée aux questions précédentes.

Exercice 2 (5 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur l'intervalle $]0,1[$, c'est-à-dire de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \qquad p(.,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice (fait en cours) est de déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

1. Déterminer la loi du couple (Z,T) avec $T = X$ en effectuant un changement de variables. Représenter graphiquement le domaine de définition du couple (Z,T).
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 3 : Estimation (5 points)

On considère des variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre θ

$$P[X_i = x_i; \theta] = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, \quad x_i \in \{0,1\}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On remarquera qu'avec cette définition $P[X_i = 0] = 1 - \theta$ et $P[X_i = 1] = \theta$ et que les variables X_i sont à valeurs dans $\{0,1\}$.

1. Déterminer la vraisemblance de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ et montrer qu'elle admet un maximum global unique pour une valeur de θ que l'on précisera. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\hat{\theta}_{\text{MV}}$.
2. L'estimateur $\hat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il sans biais et convergent ?
3. Déterminer la borne de Cramér-Rao pour les estimateurs non-biaisés de θ. L'estimateur $\hat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?

Exercice 4 : Test statistique (5 **points)**

On considère une suite de variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre θ

$$P[X_i = x_i; \theta] = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, \quad x_i \in \{0,1\}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On remarquera qu'avec cette définition $P[X_i = 0] = 1 - \theta$ et $P[X_i = 1] = \theta$ et que les variables X_i sont à valeurs dans $\{0,1\}$. On désire tester les deux hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

1. Montrer que la statistique du test de Neyman-Pearson peut s'écrire $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et déterminer la région critique associée dans les deux cas $\theta_1 < \theta_0$ et $\theta_1 > \theta_0$.

2. On suppose que n est suffisamment grand pour appliquer le théorème de la limite centrale à la variable aléatoire T et on se place dans le cas $\theta_1 < \theta_0$.

   - Quelle est la loi approchée de T résultant de l'application de ce théorème ?
   - En utilisant la loi approchée de T trouvée à la question précédente, déterminer le risque de première espèce α en fonction du seuil du test noté S_α, de n, θ_0 et de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ notée F. Toujours à l'aide de la loi approchée de T trouvée à la question précédente, en déduire la puissance du test π en fonction du seuil du test noté S_α, de n, θ_1 et de la fonction F.
   - En déduire les courbes COR de ce test.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1}...p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance   **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu - 1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2} - 1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)