EXAMEN PROBABILITÉS - 1TR

Mercredi 22 Octobre 2014 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisŐe)

Exercice 1: Couple de variables aléatoires continues

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité de probabilité

$$p(x,y) = \begin{cases} e^{-y} \text{ si } y \geq x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les densités marginales de X et Y et indiquer les lois obtenues en s'aidant des tables de lois. En déduire les moyennes $E[X], E[Y]$ et les variances $\text{Var}[X], \text{Var}[Y]$.
2. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = Y - X$ et $T = X$. En déduire la loi de Z.
3. Déterminer la loi conditionnelle de $X|Y = y$ et $E[X|Y]$. En déduire $E[X]$ en utilisant le théorème des espérances conditionnelles. Vérifier qu'on obtient le même résultat qu'à la première question.

Exercice 2: Couple de variables aléatoires discrètes

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois de Poisson de paramètres λ et μ, c'est-à-dire telles que

$$P[X = i] = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \ i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P[Y = j] = \frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu} \ j \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X + Y$ et $T = X$. En déduire la loi de Z ainsi que sa moyenne $E[Z]$ et sa variance $\text{Var}[Z]$.
   On rappelle que $(x + y)^m = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{C}_m^n x^n y^{m-n}$ *avec* $\mathcal{C}_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.
2. Déterminer la fonction caractéristique de Z et retrouver la loi de Z (cf question précédente).
3. Déterminer la loi conditionnelle de $Z|T = t$ et $E[Z|T]$. En déduire $E[Z]$ en utilisant le théorème des espérances conditionnelles. Vérifier qu'on obtient le même résultat qu'à la première question.

Exercice 3: Approximation de la loi d'une somme de variables binaires

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ (avec $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$) de lois de Bernoulli telles que

$$P[X_i = 1] = p \quad \text{et} \quad P[X_i = 0] = q$$

avec $p + q = 1$.

1. Quelle est la loi de $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$?
2. Que donne l'application du théorème de la limite centrale à la variable aléatoire Y_n ? En déduire qu'on peut pour n "grand" approcher la loi de Y_n par une loi normale dont on précisera les paramètres. En déduire une approximation de $P[Y_n < a]$ à l'aide de la fonction de répartition F d'une loi normale centrée réduite définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES
$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique
$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it-1}\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)