EXAMEN PROBABILITÉS - 1TR

Mercredi 4 Novembre 2015 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Lois uniformes sur $\{0, 1\}$

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur l'ensemble $\{0, 1\}$ vérifiant

$$P[X = 0] = P[X = 1] = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P[Y = 0] = P[Y = 1] = \frac{1}{2}$$

et on définit la variable aléatoire $Z = X - Y$.

1. Déterminer $E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$ et $E[Y^2]$. En déduire la moyenne et la variance de la variable aléatoire Z.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z. Retrouver les valeurs de la moyenne et de la variance de Z déterminées à la question précédente.
3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.
4. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire Z que l'on notera $\phi(t) = E[\exp(itZ)]$ et ses deux premières dérivées $\phi'(t)$ et $\phi''(t)$. Retrouver les expressions de la moyenne et de la variance de Z obtenues à la première question de cet exercice à partir de $\phi'(0)$ et de $\phi''(0)$.

Exercice 2: Première loi de Laplace

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V de lois exponentielles définies par

$$p(u, .) = \begin{cases} e^{-u} \text{ si } u > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(., v) = \begin{cases} e^{-v} \text{ si } v > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) avec $X = U - V$ et $Y = V$. En déduire la densité de X. On dira dans la suite de cet exercice que X possède la première loi de Laplace.
2. En utilisant les tables de lois, donner les fonctions caractéristiques des variables aléatoires U et V. En remarquant que $X = U - V$, en déduire la fonction caractéristique de X, c'est-à-dire la fonction caractéristique d'une première loi de Laplace. Vérifier que cette expression coincide avec celle donnée dans les tables de lois.
3. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $W_{12} = Z_1 Z_2$ où Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0, 1)$ (on pourra par exemple utiliser le théorème des espérances conditionnelles). En déduire la fonction caractéristique de la variable aléatoire $W = W_{12} + W_{34} = Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$ où Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sont quatre variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0, 1)$. Quelle est la loi de W ?

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens

Dans cet exercice, les lettres majuscules en gras sont associées à des matrices tandis que les lettres minuscules en gras indiquent des vecteurs. On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{v} = (X, Y)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m_v} = (0, 0)^T$ et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma_v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on cherche à construire à partir de ce vecteur $\boldsymbol{v}$ un autre vecteur $\boldsymbol{w}$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m_w} = (1, 2)^T$ et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma_w} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

avec $|r| < 1$ (on admettra que les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\Sigma_w}$ sont $\lambda_1 = 1 - r$ et $\lambda_2 = 1 + r$). Pour ce, on considère la transformation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{A}$ est une matrice de taille 2×2 et $\boldsymbol{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la condition $|r| < 1$ doit être vérifiée.
2. En utilisant la relation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$, déterminer $E[\boldsymbol{w}]$ et en déduire le vecteur $\boldsymbol{b}$ recherché.
3. En utilisant la relation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$, déterminer la matrice de covariance de $\boldsymbol{w}$ en fonction de la matrice $\boldsymbol{A}$. En écrivant la matrice $\boldsymbol{A}$ sous la forme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

   déterminer des réels a, b et c répondant au problème posé.
4. Quelle sont les lois des variables aléatoires $T = 2X + Y + 3$ et $U = X^2 + Y^2$?

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES
$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)