EXAMEN PROBABILITÉS - 1TR

19 Octobre 2016 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Minimum de deux lois de Pascal (8 **points**)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois de Pascal de paramètre p définies sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$P[X=k]=P[Y=k]=p(1-p)^{k-1}, \quad k\geq 1$$

et on définit la variable aléatoire $Z=\min\{X,Y\}$.

1. Déterminer le domaine Δ des valeurs possibles de la variable aléatoire Z et les couples (X,Y) correspondant à $Z=z$ avec $z\in\Delta$. En déduire que Z suit une loi de Pascal dont on précisera le paramètre.
2. On considère la variable aléatoire $T=|X-Y|$. Déterminer $P[Z=z,T=0]$ pour $z\in\Delta$.
3. Montrer que pour $t\geq 1$ et $z\in\Delta$, on a
$$P[Z=z,T=t]=2p^2(1-p)^{2z+t-2}.$$
4. Déduire de la question précédente les lois marginales de Z et T. Vérifier qu'on retrouve la loi de Z obtenue à la première question de cet exercice.
5. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2: Rapport de deux lois gamma (10 **points**)

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V de lois gamma définies par

$$p(u,.)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(p)}u^{p-1}e^{-u} \text{ si } u>0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,v)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(q)}v^{q-1}e^{-v} \text{ si } v>0\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

où p et q sont deux réels appartenant à l'intervalle $]2,+\infty[$ et $\Gamma(x)$ est la fonction gamma telle que

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty}u^n e^{-u}du=n! \text{ si } n\in\mathbb{N}.$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $T=1/V$ et reconnaitre cette loi dans le tableau de lois. En déduire la moyenne et la variance de T ainsi que $E[T^2]$. Déterminer la moyenne et la variance de la variable aléatoire $X=\frac{U}{V}$.
2. On considère la variable aléatoire $Y=U-V$. Déterminer la loi du couple (X,Y) (on prendra soin de montrer que ce couple est défini sur le domaine $]1,+\infty[\times]0,+\infty[\cup]0,1[\times]-\infty,0[$). En déduire la loi marginale de la variable aléatoire X.
3. Montrer que la variable aléatoire $Z=\frac{X}{X+1}$ admet une loi beta dont on déterminera les paramètres. Déterminer $\mu_1=E\left[\frac{Z}{1-Z}\right]$ et $\mu_2=E\left[\left(\frac{Z}{1-Z}\right)^2\right]$. En utilisant ces expressions de μ_1 et μ_2, retrouver les expressions de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire X déterminées à la première question de cet exercice.

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (2 **points**)

Déterminer la moyenne et la variance de $Y=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}$ (en fonction de $\boldsymbol{a},\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$) lorsque $\boldsymbol{a}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}^T$ est le vecteur transposé de $\boldsymbol{a}$ et $X=(X_1,...,X_n)^T$ est un vecteur Gaussien de moyenne $\boldsymbol{m}\in\mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ de taille $n\times n$.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ, ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)