EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

15 Novembre 2018 (14h-15h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (7 points)

1. On considère une variable aléatoire continue X définie sur l'intervalle $]0,T[$ ($T>0$) de densité

$$p(x) = \begin{cases} Ke^{-ax} \text{ si } x \in]0,T[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{1}$$

   où $K>0$ est une constante dépendant de $a>0$.

   - Déterminer la valeur de K pour que p soit une densité de probabilité (on ne remplacera pas K par son expression dans ce qui suit).
   - Montrer que la loi de la variable aléatoire

$$Y = \frac{KT}{a}\left[1-\exp(-aX)\right]. \tag{2}$$

     est une loi uniforme sur un intervalle à préciser.

2. De manière plus générale, on considère une variable aléatoire continue X définie sur l'intervalle $]0,T[$ ($T>0$) de densité $p(x)$ et de fonction de répartition strictement croissante. On considère la variable aléatoire Y définie par

$$Y = T\int_0^X p(u)du. \tag{3}$$

   - Montrer que dans le cas où X possède la loi définie par (1), la variable aléatoire Y définie dans (3) admet l'expression (2) (ce qui montre que cette question généralise la précédente).
   - Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0,T[$.

Exercice 2: Changement de variables (9 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois exponentielles de paramètre 1 (notées $X \sim \mathcal{E}(1)$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$) définies par

$$p(x,.) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} e^{-y} \text{ si } y>0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On remarquera que la loi exponentielle est un cas particulier de loi gamma dont les paramètres sont précisés dans les tables de lois.

1. Déterminer la loi du couple (Z,T) lorsque $Z = X+Y$ et $T = X-Y$ en prenant soin (comme d'habitude) de déterminer le domaine de définition de ce couple. En déduire les lois marginales de Z et T, leurs moyennes $E[Z]$ et $E[T]$ et leurs variances Var(Z) et Var(T).

2. Déterminer la covariance du couple (Z,T).

3. Déterminer la fonction caractéristique de Z. En utilisant les tables, retrouver la loi de Z déterminée à la première question.

Exercice 3: Médiane (5 points)

On considère une variable aléatoire réelle X de fonction de répartition notée F continue et strictement croissante et on appelle médiane de X le nombre m tel que $F(m) = 1/2$.

1. Déterminer la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $a > 0$ notée $\mathcal{E}(a)$ de densité
$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
En déduire la médiane de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

2. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ de même loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ et on définit la suite de variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$ de la manière suivante
$$\begin{array}{l} Y_i = 1 \text{ si } X_i > m \\ Y_i = 0 \text{ sinon} \end{array}$$
où m est la médiane de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.
   - Déterminer la loi de Y_i, sa moyenne et sa variance
   - En déduire la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   - En utilisant le théorème de la limite centrale, montrer que la loi de S_n peut s'approcher pour n grand par une loi normale dont on précisera les paramètres.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance   **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ, ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)