EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Mardi 23 Octobre 2018 (14h-15h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (6 points)

On considère trois variables aléatoires (mutuellement) indépendantes X, Y et Z de lois de Bernoulli telles que

$$\begin{array}{c} P[X=1]=1-P[X=0]=p \\ P[Y=1]=1-P[Y=0]=p \\ P[Z=1]=1-P[Z=0]=\alpha \end{array} \tag{1}$$

avec $p \in]0,1[$ et $\alpha \in]0,1[$. On définit alors la variable aléatoire T comme suit

$$T = \begin{cases} X \text{ si } Z=1 \\ Y \text{ si } Z=0 \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que T suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre.
2. Quelle est la loi du couple (T, X) ? (on pourra exprimer les valeurs possibles du couple (T, X) en fonction de celles de X, Y et Z et utiliser l'indépendance entre ces variables aléatoires).
3. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (T, X).
4. Les variables aléatoires T et X sont-elles indépendantes ? En déduire l'intérêt pratique de cet exercice.

Exercice 2: Changement de variables (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur l'intervalle $]-1,+1[$, c'est-à-dire de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } y \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. On définit les deux variables aléatoires $Z = X + Y$ et $T = X - Y$. Quelle est la loi du couple (Z, T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
3. Déduire de la question précédente la loi marginale de Z et représenter la graphiquement.
4. Afin de vérifier le résultat précédent, déterminer la fonction caractéristique de $Z = X + Y$ et montrer qu'elle peut s'écrire

$$\phi_{a,b,c}(t) = -2\frac{(b-c)e^{iat} - (b-a)e^{ict} + (c-a)e^{ibt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

avec $a = -2$,$b = 2$ et $c = 0$. La densité d'une loi de probabilité de fonction caractéristique $\phi_{a,b,c}(t)$ est représentée sur la figure 1. Montrer qu'on retrouve la densité de Z trouvée à la question précédente.
Rappel: on rappelle les deux formules trigonométriques suivantes

$$\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

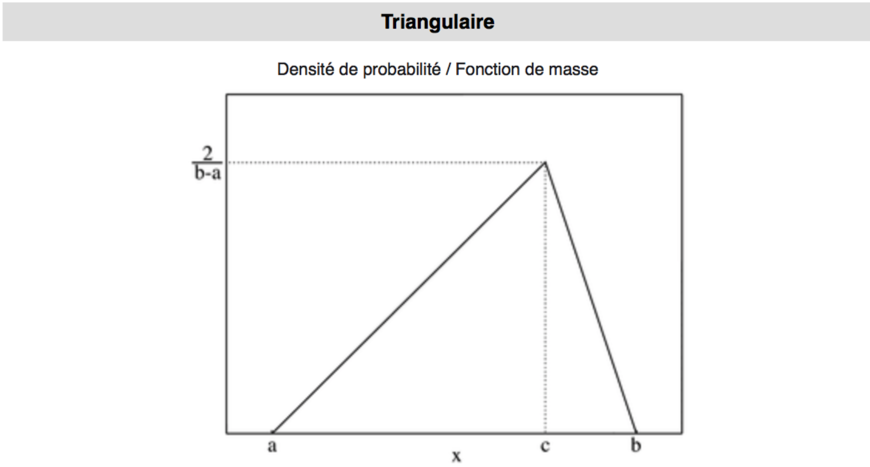

Figure 1: Densité de probabilité $\pi_{a,b,c}(x)$ associée à la fonction caractéristique $\phi_{a,b,c}(t)$.

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (6 points)

On considère un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ de loi normale à quatre dimensions de vecteur moyenne $\boldsymbol{m} = (0,0,0,0)^T$ et de matrice de covariance égale à la matrice identité. On considère les deux matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ définies par

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

On définit les vecteurs $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \boldsymbol{A}(X_1, X_2)^T$ et $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)^T = \boldsymbol{B}(X_3, X_4)^T$.

1. Quelle est la loi du vecteur $V = (\boldsymbol{Y}^T, \boldsymbol{Z}^T)^T = (Y_1, Y_2, Z_1, Z_2)^T$?
2. Déterminer les lois des vecteurs $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Z}$. Ces vecteurs sont-ils indépendants ?
3. Quelle est la loi de $T = 2||\boldsymbol{Y}||^2 = 2(Y_1^2 + Y_2^2)$?

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta,\nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ,ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)