EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 4 janvier 2021 (10h-11h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Changement de variables continues (10 points)

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \text{ si } (x, y) \in \Delta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < \frac{1}{x}, 0 < y < x\}$.

1. Représenter graphiquement le support de la densité du couple (X, Y). En déduire les supports des densités des variables X et Y. Sans faire de calcul, indiquer si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ou non.

2. Déterminer les lois marginales de X et Y.

3. Montrer que les variables aléatoires $Z = \sqrt{XY}$ et $T = \sqrt{\frac{Y}{X}}$ sont indépendantes et de lois uniformes sur $]0, 1[$.

4. Déterminer la moyenne et la variance de la variable aléatoire Y. Que pensez vous de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire X ?

Exercice 2 : loi discrète normale (6 points)

En 2003, Dilip Roy introduit une nouvelle loi de probabilité discrète appelée **loi discrète normale** à valeurs dans $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ et définie par les probabilités p_k définies par

$$p_k = \Phi\left(\frac{k + 1 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k - m}{\sigma}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

où m et $\sigma > 0$ sont deux paramètres dont la signification sera plus claire à la fin de l'exercice et Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite définie par

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

On utilisera la notation habituelle $X \sim d\mathcal{N}(m, \sigma)$ pour désigner une variable aléatoire X de loi discrète normale (de paramètres m et σ) telle que $P[X = k] = p_k$.

1. Représenter sur un graphique la densité de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et hachurer le domaine dont l'aire correspond à $P[X = k] = p_k$.

2. Déterminer $\sum_{k=-K}^{K} p_k$ et en déduire que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$.

3. Montrer que si X suit une loi normale de moyenne m et de variance σ^2, c'est-à-dire $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors pour tout réel $t > 0$, $X_t = \text{ent}\left(\frac{X}{t}\right)$ suit une loi normale discrète $d\mathcal{N}\left(\frac{m}{t}, \frac{\sigma}{t}\right)$, où $\text{ent}(a)$ est la partie entière de a, c'est-à-dire le plus grand entier $\in \mathbb{Z}$ tel que $\text{ent}(a) \leq a < \text{ent}(a) + 1$.

4. Inversement, on considère une variable aléatoire X telle que $X_t = \text{ent}\left(\frac{X}{t}\right) \sim d\mathcal{N}\left(m_t, \sigma_t\right)$ pour tout $t > 0$ et on cherche à montrer que X suit une loi normale. Montrer que la fonction de répartition de X_t notée F_t vérifie la relation

$$F_t(x) = P[X_t < x] = F_X(tx) = \Phi\left(\frac{x - m_t}{\sigma_t}\right) \qquad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{Z}$$

où F_X est la fonction de répartition de X. En déduire $F_X(u), \forall u \in \mathbb{R}$ et que X suit une loi normale de moyenne $m = tm_t$ et de variance $\sigma^2 = t^2\sigma_t^2$.

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (4 points)

On considère un vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté $\boldsymbol{X}$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ symétrique définie positive et on désire démontrer la proposition suivante :

$\boldsymbol{X}$ **est un vecteur gaussien de** $\mathbb{R}^n$
si et seulement si
$\forall \boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \neq 0$,$Y_{\boldsymbol{u}} = \sum_{j=1}^n u_j X_j$ **est une variable aléatoire normale à une dimension**

On rappelle que la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien $\boldsymbol{X}$ vérifie

$$E\left[\exp(i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{X})\right] = \exp\left(i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}\right), \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n.$$

1. Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de loi normale $N_n\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$. Quelle est la loi de $Y_{\boldsymbol{u}}$ pour $\boldsymbol{u} \neq 0$?

2. On considère un vecteur $\boldsymbol{X}$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ et on suppose que $Y_{\boldsymbol{u}} = \sum_{j=1}^n u_j X_j$ suit une loi normale à une dimension pour tout vecteur $\boldsymbol{u} \neq 0$. Déterminer la fonction caractéristique de $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ notée

$$\phi_{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{u}\right) = E\left[e^{i(u_1X_1 + ... + u_nX_n)}\right]$$

pour $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ en fonction de celle de $Y_{\boldsymbol{u}}$ (qui est connue puisque par hypothèse $Y_{\boldsymbol{u}}$ suit une loi normale à une dimension). En déduire une expression de $\phi_{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{u}\right)$ en fonction de $\boldsymbol{m}$ et de $\boldsymbol{\Sigma}$. Quelle est la loi du vecteur $\boldsymbol{X}$?

3. Conclure.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	$\mathbf{m}$	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	npq	$\left(pe^{it}+q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1!\dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x\rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\right]$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t\rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)