EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 25 octobre 2021 (8h-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : loi géométrique (5 points)

On considère une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définie dans $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ par

$$P[X = i] = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, ...$$

Quelques propriétés de cette loi sont dans la table et on adoptera la notation classique $X \sim \mathcal{G}(p)$. On rappelle le résultat élémentaire $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

1. Montrer que $P[X > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P[Y > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ est une loi géométrique (on pourra exprimer $P[Y = k]$ en fonction de $P[Y > k]$ et de $P[Y > k-1]$).
3. Montrer qu'une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre p vérifie la propriété suivante (on dit que cette loi est "sans mémoire")
$$P[X > k + l | X > l] = P[X > k], \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2.$$
4. Inversement, on considère une variable aléatoire Y de loi discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ..., \}$ qui est sans mémoire, i.e., qui vérifie
$$P[Y > k + l | Y > l] = P[Y > k], \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2.$$
On pose $p = P[Y = 1]$. Déterminer $P[Y > 1]$, puis $P[Y > 2]$ et en déduire que
$$P[Y > k] = q^k, \forall k \in \mathbb{N}.$$
Quelle est la loi de Y ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 2: Couple de variables aléatoires uniformes corrélées (5 points)

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité

$$p_a(x,y) = \begin{cases} 1 - a(1-2x)(1-2y) \text{ si } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $|a| < 1$.

1. Vérifier que p_a est une densité de probabilité pour toute valeur de $a \in]-1, +1[$. On admettra que $|(1-2x)(1-2y)| \leq 1, \forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[$.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (X, Y).
4. En prenant soin de justifier votre réponse, déterminer la ou les valeur(s) de a pour lesquelles les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 3 : Changement de variables continues (5 points)

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité

$$p_a(x,y) = \begin{cases} 1 - a(1-2x)(1-2y) \text{ si } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $|a| < 1$.

1. Déterminer la loi du couple (T, U) lorsque $T = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ et $U = -\frac{1}{\mu} \ln Y$ avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
2. Quelles sont les lois marginales de T et de U ? Pour quelle valeur de a les variables T et U sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 : Méthode Delta (5 points)

On considère n variables aléatoires indépendantes X_i de lois exponentielles de densités

$$p(x_i) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x_i) \text{ si } x_i > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la moyenne et la variance de X_i.
2. Quelle est la loi approchée pour n "grand" de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ issue de l'application du théorème de la limite centrale ? Quelle est la loi asymptotique de $U_n = \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$ lorsque $n \to \infty$.
3. On admet que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, si $\sqrt{n}\left[\bar{X}_n - m\right]$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $g'(m) \neq 0$, alors $\sqrt{n}\left[g(\bar{X}_n) - g(m)\right]$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2[g'(m)]^2)$. En déduire les lois approchées de $Y_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$ et de $Z_n = \exp\left(\bar{X}_n\right)$ pour n "grand".

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\boldsymbol{\Sigma})}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)