EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 24 Octobre 2022 (8h-9h30)

*Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)*

---

**Exercice 1** ($9$ **points**)

On considère un couple de variables aléatoires $(X, Y)$ de densité

$$p(x,y) = \begin{cases} 2\lambda^2 \exp(-\lambda y) \text{ si } y > 2x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction gamma est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

avec $\Gamma(n) = (n-1)!$

1. Montrer que les lois marginales de $X$ et de $Y$ sont des lois gamma dont on précisera les paramètres.

2. Déterminer la covariance du couple $(X, Y)$.

3. Quelle est la loi du couple $(T, U)$ avec $T = 2X - Y$ et $U = X$ ? En déduire la loi de $T$.

4. Les variables $T$ et $U$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 2 : Vecteurs Gaussiens** ($5$ **points**)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m} = (0, 0, 0)^T$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ définie comme suit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. On pose $U = X_1$ et $V = X_2 - aX_1$, où $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi du couple $(U, V)$ ? Pour quelle valeur de $a$ les variables $U$ et $V$ sont-elles indépendantes (justifier avec soin votre réponse).

2. Déterminer les densités de $X_1$ et du couple de $(X_1, X_2)$. En utilisant la définition d'une densité conditionnelle, déterminer la densité de $X_2$ sachant $X_1 = x_1$ et en déduire qu'elle correspond à une loi normale $\mathcal{N}(x_1, 3)$. On rappelle le résultat suivant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3 : lois binomiales corrélées (6 points)**

Soient $X, Y$ et $Z$, trois variables aléatoires indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(m, p)$, $\mathcal{B}(n-m, p)$ et $\mathcal{B}(n-m, p)$ avec $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > m$ et $p \in ]0, 1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X + Z$.

1. Déterminer les fonctions caractéristiques de $U$ et $V$ et en déduire que ces deux variables suivent la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2. Montrer que la covariance du couple $(U, V)$ est égale à la variance de $X$. En déduire le coefficient de corrélation du couple $(U, V)$ Les variables $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

3. Montrer que la probabillité $P[U = k, V = l]$ peut se mettre sous la forme

$$P[U = k, V = l] = \sum_{i=0}^{\min\{k,l\}} \binom{n-m}{k-i} \binom{n-m}{l-i} \binom{m}{i} p^{k+l-i} q^{2n-k-m-l+i}$$

avec $q = 1 - p$ et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (on pourra utiliser le théorème des probabilités totales et calculer la probabilité conditionnelle $P[U = k, V = l | X = i]$).

**LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES**

$\mathbf{m}$ : moyenne $\sigma^2$ : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

| LOI | Probabilités | $\mathbf{m}$ | $\sigma^2$ | F. C. |
|---|---|---|---|---|
| Uniforme | $p_k = \frac{1}{n}$ <br> $k \in \{1, \ldots, n\}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ | $\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$ |
| Bernoulli | $p_1 = P[X = 1] = p$ <br> $p_0 = P[X = 0] = q$ <br> $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ | $p$ | $pq$ | $pe^{it} + q$ |
| Binomiale <br> $B(n,p)$ | $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ <br> $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ <br> $k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ | $np$ | $npq$ | $\left(pe^{it}+q\right)^n$ |
| Binomiale négative | $p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ <br> $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ <br> $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ | $n\dfrac{q}{p}$ | $n\dfrac{q}{p^2}$ | $\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$ |
| Multinomiale | $p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ <br> $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ <br> $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ <br> $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$ | $np_j$ | Variance : <br> $np_jq_j$ <br> Covariance : <br> $-np_jp_k$ | $\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$ |
| Poisson <br> $P(\lambda)$ | $p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ <br> $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$ |
| Géométrique | $p_k = pq^{k-1}$ <br> $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ <br> $k \in \mathbb{N}^*$ | $\dfrac{1}{p}$ | $\dfrac{q}{p^2}$ | $\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$ |

**LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES**

$\mathbf{m}$ : moyenne $\sigma^2$ : variance **F. C. :** fonction caractéristique

| LOI | Densité de probabilité | $\mathbf{m}$ | $\sigma^2$ | F. C. |
|---|---|---|---|---|
| Uniforme | $f(x) = \frac{1}{b-a}$ <br> $x \in ]a, b[$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$ |
| Gamma <br> $\mathcal{G}(\nu, \theta)$ | $f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ <br> $\theta > 0,\ \nu > 0$ <br> $x \geq 0$ <br> avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ | $\dfrac{\nu}{\theta}$ | $\dfrac{\nu}{\theta^2}$ | $\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$ |
| Inverse gamma <br> $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$ | $f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ <br> $\theta > 0,\ \nu > 0$ <br> $x \geq 0$ <br> avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ | $\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$ | $\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$ | (*) |
| Première loi <br> de Laplace | $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}$ | 0 | 2 | $\dfrac{1}{1+t^2}$ |
| Normale univariée <br> $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$ | $m$ | $\sigma^2$ | $e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ |
| Normale multivariée <br> $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$ | $f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ <br> $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ <br> $x \in \mathbb{R}^p$ | $\boldsymbol{m}$ | $\boldsymbol{\Sigma}$ | $e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$ |
| $\text{Khi}_2$ <br> $\chi^2_\nu$ <br> $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ | $f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ <br> $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ <br> $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$ | $\nu$ | $2\nu$ | $\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$ |
| Cauchy <br> $c_{\lambda,\alpha}$ | $f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ <br> $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ | (-) | (-) | $e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$ |
| Beta <br> $B(a, b)$ | $f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ <br> $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ <br> $a > 0,\ b > 0$ <br> $x \in ]0, 1[$ <br> avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ | $\frac{a}{a+b}$ | $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ | (*) |