EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 23 Octobre 2023 (8h00-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : lois de Bernoulli (6 **points)**

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi de Bernoulli, i.e., telles que

$$P[X = 1] = P[Y = 1] = p \text{ et } P[X = 0] = P[Y = 0] = q = 1 - p.$$

avec $p \in]0, 1[$

1. Déterminer la loi du couple (U, T) avec $U = XY$ et $T = X$. En déduire la loi marginale de U.
2. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (U, T). Les variables U et T sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de $T|U = 0$.
4. Déterminer la fonction caractéristique de X. En utilisant le théorème des espérances conditionnelles, déterminer la fonction caractéristique de $U = XY$. Retrouver la loi de U déterminée à la première question.

Exercice 2 : changement de variables continues (9 **points)**

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité

$$p(x, y) = \frac{|x|}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left[-\frac{1}{6}x^2(1 + 3y^2)\right], (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. On effectue le changement de variables $U = XY$ et $T = X$. Montrer que (U, T) est un vecteur gaussien dont on déterminera le vecteur moyenne $\boldsymbol{m}$ et la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$. En déduire les lois marginales de U et de T. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la covariance du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
4. Exprimer $V = X(1 + Y)$ en fonction de T et U et en déduire la loi de V.

Exercice 3 : Vecteur Gaussien (6 points)

On considère un vecteur Gaussien $(X, Y)^T \in \mathbb{R}^2$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ (supposée symétrique définie positive). L'objectif de cet exercice est de montrer que la moyenne de la variable aléatoire $Y|X$ est définie par

$$E(Y|X) = E(Y) + \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} \left[X - E(X)\right].$$

1. Rappeler l'expression des éléments de $\boldsymbol{\Sigma}$ en fonction de var(X), var(Y) et cov(X, Y).

2. Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V} = (X, Z)^T$ avec $Z = Y - u(X)$ et $u(X) = E(Y) + \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)} \left[X - E(X)\right]$ s'écrit $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}(X, Y)^T + \boldsymbol{b}$ avec une matrice $\boldsymbol{A}$ et un vecteur $\boldsymbol{b}$ que l'on précisera. En déduire que $\boldsymbol{V}$ est un vecteur Gaussien dont on déterminera le vecteur moyenne et la matrice de covariance. Expliquer pourquoi les variables X et $Z = Y - u(X)$ sont indépendantes.

3. En utilisant la relation $Y = Z + u(X)$ et le fait que Z et X sont des variables aléatoires indépendantes, montrer que $E(Y|X) = E(Z) + u(X)$ et conclure.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n-1}{n+k-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x\rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t\rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)