EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 21 Octobre 2024 (8h00-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Changement de variables continues (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} 2y \text{ si } y \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X,Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
2. On définit les deux variables aléatoires $Z = \frac{Y}{X}$ et $T = X$. Quelle est la loi du couple (Z,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
3. Déduire de la question précédente la loi marginale de Z (on fera attention au domaine de définition de Z et on pourra vérifier que l'intégrale de la densité obtenue est égale à 1 pour éviter une éventuelle erreur de calcul).
4. Déterminer la covariance du couple (Z,T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 : Vecteurs Gaussiens (6 points) (inspiré d'un exercice de D. Pastor et C. Sintes)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ de vecteur moyenne nul et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\rho \in]-1,+1[$.

1. On admet que les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ sont $\lambda_1 = 2 + \sqrt{1+3\rho^2}$ et $\lambda_2 = 2 - \sqrt{1+3\rho^2}$. Pourquoi doit-on imposer la condition $\rho \in]-1,+1[$ pour que $\boldsymbol{X}$ soit un vecteur gaussien ?
2. Déterminer les variances des variables X_1 et X_2 notées var(X_1) et var(X_2), et la covariance du vecteur $\boldsymbol{X}$ notée cov(X_1, X_2). En justifiant proprement votre réponse, indiquer la valeur de ρ pour laquelle les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.
3. On construit les deux variables aléatoires $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}X_1 - X_2$ et $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}X_1 + X_2$. Quelle est la loi du vecteur $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$?
4. Déterminer les lois marginales des variables Y_1 et Y_2. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes (justifier votre réponse avec soin) ?

Exercice 3 : Cumulants d'une variable aléatoire réelle (6 points)

On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire réelle X est définie par $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$, $t \in \mathbb{R}$ et que le développement de Taylor de la fonction e^x au voisinage de $x = 0$ est $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

1. Rappeler comment on peut obtenir les moments $m_k = E[X^k]$ de la variable aléatoire X à partir de $M_X(t)$. Déterminer la fonction $M_X(t)$ pour une loi de Poisson de paramètre λ (en remarquant par exemple qu'on obtient $M_X(t)$ à partir de la fonction caractéristique en remplaçant t par $-it$) et retrouver l'expression de la moyenne $m_1 = E[X]$ et du moment d'ordre $m_2 = E[X^2]$ de cette loi de Poisson.

2. On appelle fonction génératrice des cumulants la fonction $C_X(t) = \ln[M_X(t)]$ qui admet généralement un développement de Taylor autour de $t = 0$ de la forme

$$C_X(t) = \ln[M_X(t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{X,k} \frac{t^k}{k!},$$

où les coefficients $\kappa_{X,k}$ sont appelés cumulants de la variable aléatoire X. Déterminer $C_X(t)$ pour une loi de Poisson et pour une loi normale (on pourra utiliser les tables de lois et remarquer à nouveau qu'on obtient $M_X(t)$ à partir de la fonction caractéristique en remplaçant t par $-it$). En déduire les cumulants d'une loi de Poisson et d'une loi normale.

3. En s'inspirant de la première question, expliquer comment déterminer les cumulants d'une variable aléatoire X par dérivations successives de $C_X(t)$.

4. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y et on construit $Z = X + Y$. Déterminer la fonction génératrice des cumulants de Z en fonction de $C_X(t)$ et de $C_Y(t)$. En déduire comment déterminer les cumulants de Z en fonction de ceux de X et de Y.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)