EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Lundi 20 octobre 2025

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Changement de variables discrètes (5 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires binaires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ définies sur l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$. On rappelle que

$$P[X=1] = P[Y=1] = p \text{ et } P[X=0] = P[Y=0] = q = 1-p.$$

1. Déterminer la fonction caractéristique de $U = X + Y$ et en déduire la loi de U.
2. Déterminer la loi du couple (U,V) avec
$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X \end{cases}$$
3. Déterminer la loi marginale de U à partir de la loi du couple (U,V) et retrouver le résultat de la première question.
4. Déterminer le coefficient de corrélation du couple (U,V).
5. Déterminer la fonction de répartition de U et représenter la graphiquement pour $p = q = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Changement de variables continues (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois gamma $\Gamma(a,\theta)$ et $\Gamma(b,\theta)$, i.e., de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} \frac{\theta^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} e^{-\theta y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X,Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
2. On définit les deux variables aléatoires $S = X + Y$ et $T = \frac{X}{X+Y}$. Quelle est la loi du couple (S,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
3. Montrer que la densité de (S,T) s'écrit comme le produit d'une densité de loi gamma et d'une densité de loi beta dont on déterminera les paramètres. En déduire les lois marginales de S et de T. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ? En déduire sans faire de calculs les moyennes et variances de S et T notées $E[S]$, $E[T]$, var$[S]$, var$[T]$ et cov(S,T).
4. Montrer que (on pourra utiliser les lois de X, Y, S et T pour éviter de faire des calculs inutiles)
$$E\left[\frac{X}{X+Y}\right] = \frac{E[X]}{E[X]+E[Y]}.$$
Que pensez-vous de ce résultat ?
5. On veut vérifier que la loi de S obtenue à la question précédente est correcte. Déterminer la fonction caractéristique de S en fonction de celles de X et de Y et conclure.

Exercice 3 : Vecteurs gaussiens (7 points)

Dans cet exercice, les lettres majuscules en gras sont associées à des matrices tandis que les lettres minuscules en gras indiquent des vecteurs. On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{v} = (X, Y)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m_v} = (0, 0)^T$ et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma_v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on cherche à construire à partir de ce vecteur $\boldsymbol{v}$ un autre vecteur gaussien $\boldsymbol{w}$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m_w} = (1, 2)^T$ et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma_w} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

avec $|r| < 1$ (on admettra que les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\Sigma_w}$ sont $\lambda_1 = 1 - r$ et $\lambda_2 = 1 + r$). Pour ce, on considère la transformation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{A}$ est une matrice de taille 2×2 et $\boldsymbol{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la condition $|r| < 1$ doit être vérifiée.
2. Sous quelle condition le vecteur $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$ est-il un vecteur gaussien ?
3. En utilisant la relation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$, déterminer $E[\boldsymbol{w}]$ et en déduire le vecteur $\boldsymbol{b}$ recherché.
4. En utilisant la relation $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$, déterminer la matrice de covariance de $\boldsymbol{w}$ en fonction de la matrice $\boldsymbol{A}$. En écrivant la matrice $\boldsymbol{A}$ sous la forme

   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

   déterminer des réels α, β et γ répondant au problème posé.
5. Quelle sont les lois des variables aléatoires $T = 2X + Y + 3$ et $U = X^2 + Y^2$?

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it}+q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : np_jq_j Covariance : $-np_jp_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géometrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	Expression compliquée
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t\rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},\ \Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	Expression compliquée
Pareto $P(a,b)$	$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]a,+\infty[$	$\frac{ab}{b-1}$	$\frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$	Expression compliquée