EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

Lundi 21 octobre 2019 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (5 points)

On considère une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définie dans $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ par

$$P[X = x_i] = p(1-p)^{x_i - 1}, \quad x_i = 1, 2, ...$$

Une telle loi est de moyenne $E[X] = \frac{1}{p}$, de variance $\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$ avec $q = 1-p$ et de fonction caractéristique $\phi(t) = \dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$ (voir tables) et on adoptera la notation classique $X \sim \mathcal{G}(p)$.

1. Montrer que $P[X > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P[X > k] = q^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ est une loi géométrique (on pourra exprimer $P[X = k]$ en fonction de $P[X > k]$ et de $P[X > k-1]$).
3. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi géométrique de paramètre p (i.e., $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$) et le minimum de ces deux variables $Z = \min\{X, Y\}$. Déterminer $P[Z > k]$ et en déduire que Z suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
4. Montrer qu'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p vérifie la propriété suivante (on dit que cette loi est "sans mémoire")

$$P[X > k + l | X > l] = P[X > k], \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2.$$

Exercice 2: Changement de variables (10 points)

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité

$$p(x,y) = \begin{cases} A \text{ si } x \in]-1, +1[\text{ et } 0 < y < |x| \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où A est une constante positive.

1. Représenter graphiquement le domaine de (X, Y) et en déduire que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Déterminer la valeur de A.
3. Déterminer la densité marginale de X.
4. Montrer que Y suit une loi Beta dont on déterminera les paramètres.
5. Déterminer les moyennes $E[X], E[Y]$ et les variances $\text{Var}[X], \text{Var}[Y]$ (en s'aidant lorsque cela est possible des tables de lois).
6. Déterminer la covariance du couple (X, Y).
7. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = \frac{Y}{X}$ et $T = X$.

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (5 points)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ de vecteur moyenne $\boldsymbol{m} = (0,0,0)^T$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ définie comme suit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les lois de la variable aléatoire X_1 et du vecteur (X_2, X_3).
2. On pose $V = X_2$ et $W = X_3 - aX_2$, où $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi du couple (V, W) ? Pour quelle valeur de a les variables V et W sont-elles indépendantes (justifier avec soin vos réponses).
3. Déterminer une matrice $\boldsymbol{M}$ de taille 3×3 telle que le vecteur $(U, V, W)^T = \boldsymbol{MX}$ soit tel que les couples (U, V), (U, W) et (V, W) soient constitués de variables aléatoires indépendantes.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ, ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)