EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

Mercredi 6 Janvier 2021 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (4 points)

On considère une variable aléatoire X de loi discrète uniforme sur l'ensemble $\{-1, 0, +1\}$ telle que

$$P[X = -1] = P[X = 0] = P[X = 1] = \frac{1}{3}.$$

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
2. On pose $Z = X$. Quelle est la loi du couple (Y, Z) ?
3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la covariance du couple (Y, Z). Expliquer avec soin si la valeur de cette covariance est en accord avec le résultat de la question précédente.

Exercice 2: Changement de variables (10 points)

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité

$$p(x, y) = \begin{cases} 4y(1 - x + y) \text{ si } x > 0, y \in]0, 1[, x > y \text{ et } x < y + 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement le domaine de (X, Y), déterminer le domaine de définition des variables X et Y et déterminer si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ou pas.
2. Déterminer la densité marginale de X.
3. Montrer que Y suit une loi Beta dont on déterminera les paramètres. En déduire la moyenne $E[Y]$ et la variance Var$[Y]$ de la variable aléatoire Y.
4. Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X - Y$ et $T = Y$.
5. Montrer que les variables aléatoires Z et T sont indépendantes.
6. Montrer que la covariance du couple (Z, T) vérifie la relation suivante

   $$\text{cov}(Z, T) = \text{cov}(X, Y) - \text{Var}[Y].$$

   En déduire la covariance du couple (X, Y).

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (6 points)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{V} = (X, Y)^T$ de densité

$$p(x,y) \propto \exp(-x^2 - y^2 + axy + x + y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

avec $a \in]-2, +2[$ et où $\propto$ signifie "est proportionnel à". On rappelle le résultat suivant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le vecteur moyenne et la matrice de covariance du vecteur (X, Y).
2. Pourquoi doit-on imposer une condition sur le paramètre a pour que $p(x, y)$ soit la densité d'un vecteur gaussien ?
3. A quelle condition les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?
5. Déterminer la loi conditionnelle de $X|Y = y$.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1}...p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : np_jq_j Covariance : $-np_jp_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	$\mathbf{m}$	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)