EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

Jeudi 18 Novembre 2021 (8h00-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (7 points)

On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ, i.e., $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et une variable aléatoire Y telle que $Y|X = n$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$, i.e., $Y|X = n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On rappelle le résultat classique $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.
3. Montrer que $E[XY] = \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)$ (on pourra utiliser le théorème des espérances conditionnelles et le fait que la moyenne de $Y|X = n$ est connue).
4. Déterminer a tel que la covariance du couple $(X, Z = X + aY)$ soit nulle.

Exercice 2: Loi du produit de deux variables aléatoires de lois uniformes (7 points)

On considère un couple de variables aléatoires indépendantes (X, Y) telles que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = XY$ et de vérifier quelques propriétés de cette loi.

1. Déterminer la densité du couple (Z, T) avec $Z = XY$ et $T = Y$ en prenant soin de déterminer le domaine de définition du couple.
2. Déterminer la loi marginale de $Z = XY$ (on prendra bien soin de déterminer le domaine de définition de la densité de Z).
3. Déterminer la covariance du couple (Z, T) notée $\mathrm{cov}(Z, T)$. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ? Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $\mathrm{cov}(Z, T)$?

Exercice 3: Vecteurs Gaussiens (6 points)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{V} = (X, Y)^T$ de vecteur moyenne nul et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\rho \in]-1, +1[$.

1. Pourquoi doit-on imposer la condition $\rho \in]-1, +1[$ pour que $\boldsymbol{V}$ soit un vecteur gaussien ?
2. On pose $Z_1 = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $Z_2 = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$. Quelle est la loi du vecteur $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)^T$?
3. Déterminer les lois marginales des variables Z_1 et Z_2. Les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes (justifier votre réponse avec soin) ?
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $T = \frac{Z_1^2}{1+\rho} + \frac{Z_2^2}{1-\rho}$.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1! ... k_m!} p_1^{k_1} \ ... \ p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x > 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x > 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x > 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $\mathcal{C}_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $\mathcal{B}(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)