EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

Jeudi 17 Novembre 2022 (8h00-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Espérance conditionnelle (6 points) (inspiré d'un exercice de L. Rouvière)

On considère deux variables aléatoires aléatoires discrètes X et Y à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que $P[(X,Y)=(1,0)]=a$, $P[(X,Y)=(0,1)]=2a$ et $P[(X,Y)=(0,0)]=P[(X,Y)=(1,1)]=3a$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi marginale de Y, sa moyenne $E[Y]$ et sa variance var$[Y]$.
3. Calculer $E[Y|X=0]$ et $E[Y|X=1]$. En déduire la loi de la variable aléatoire $E[Y|X]$.
4. Retrouver la valeur de $E[Y]$ à partir de la moyenne de la variable aléatoire $E[Y|X]$ en justifiant ce résultat.

Exercice 2: Changement de variables continues (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de densités

$$p(x,.)=\begin{cases}\frac{1}{2} \text{ si } x\in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y)=\begin{cases}2y \text{ si } y\in]0,1[\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X,Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
2. On définit les deux variables aléatoires $Z=\frac{Y}{X}$ et $T=X$. Quelle est la loi du couple (Z,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
3. Déduire de la question précédente la loi marginale de Z (on pourra vérifier que l'intégrale de cette densité est égale à 1 pour éviter une éventuelle erreur de calcul).
4. Déterminer la covariance du couple (Z,T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 3: Vecteur Gaussien (6 points)

On considère un vecteur Gaussien $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)^T$ de vecteur moyenne nul et de matrice de covariance

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\rho\in]-1,+1[$.

1. On admet que les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ sont $\lambda_1=2+\sqrt{1+3\rho^2}$ et $\lambda_2=2-\sqrt{1+3\rho^2}$. Pourquoi doit-on imposer la condition $\rho\in]-1,+1[$ pour que $\boldsymbol{X}$ soit un vecteur gaussien ?

2. Déterminer les variances des variables X_1 et X_2 notées $\text{var}(X_1)$ et $\text{var}(X_2)$, et la covariance du vecteur $\boldsymbol{X}$ notée $\text{cov}(X_1, X_2)$. En justifiant proprement votre réponse, indiquer la valeur de ρ pour laquelle les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

3. On pose $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1 - X_2$ et $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1 + X_2$. Quelle est la loi du vecteur $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$?

4. Montrer que la loi conditionnelle de $X_2 | X_1 = x_1$ est une loi normale dont on précisera la moyenne et la variance.
   On donne
$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{3(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\rho\sqrt{3} \\ -\rho\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!}p_1^{k_1} \; ... \; p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x > 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x > 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x > 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $\mathcal{C}_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $\mathcal{B}(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)