EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

Lundi 20 Novembre 2023 (8h00-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Minimum entre X et $1-X$ (6 points)

On considère une variable aléatoire X continue à valeurs dans $]0,1[$ de densité de probabilité $p(x)$ et de fonction de répartition $F(x)$. On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, 1-X\}$ et à certaines de ses propriétés.

1. Montrer que la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et que sa densité s'écrit
$$\pi(y) = [p(y) + p(1-y)]\mathbb{I}_{\left]0,\frac{1}{2}\right]}(y)$$
où $\mathbb{I}_{\left]0,\frac{1}{2}\right]}$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

2. En utilisant la question précédente, déterminer la loi de $Y = \min\{X, 1-X\}$ lorsque
   - X suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$
   - X suit la loi beta $B(2,2)$ de densité $p(x) = 6x(1-x)\mathbb{I}_{]0,1[}(x)$

3. En utilisant l'expression de $\pi(y)$ déterminée à la question 1, montrer que la moyenne de Y s'écrit
$$E[Y] = \int_0^{\frac{1}{2}} yp(y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-y)p(y)dy. \tag{1}$$
En déduire $E[Y]$ lorsque X suit une loi uniforme sur $]0,1[$ et comparer avec la moyenne de la loi trouvée à la question précédente (fournie par les tables de lois).

Exercice 2: Changement de variables continues (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur $]1,2[$, c'est-à-dire de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]1,2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in]1,2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X,Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.

2. On définit les deux variables aléatoires $Z = XY$ et $T = Y$. Quelle est la loi du couple (Z,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).

3. Déterminer la loi marginale de Z. Vérifier que l'intégrale de cette densité est égale à 1 (on rappelle que la primitive de $\ln(t)$ est $t\ln(t) - t$).

4. Déterminer la covariance du couple (Z,T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 3: Produit de lois de Rademacher (6 **points)**

On considère une suite de variables aléatoires $X_k, k \in \mathbb{N}$ indépendantes à valeurs dans $\{-1, +1\}$ telles que $P[X_k = 1] = p \in]0, 1[$ et $P[X_k = -1] = 1-p$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la loi de la variable aléatoire $T_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la moyenne et la variance de X_k en fonction de p.
2. Quelles sont les valeurs possibles de T_n ? Calculer $E[T_n]$ et en déduire une relation entre $\pi_1 = P[T_n = 1]$ et $\pi_{-1} = P[T_n = -1]$.
3. Déterminer une autre relation entre π_1 et π_{-1} en utilisant le fait que la somme des probabilités d'une variable aléatoire discrète est égale à 1. En déduire la loi de T_n.
4. Déterminer la fonction caractéristique d'une loi uniforme discrète à valeurs dans $\{-1, +1\}$ puis la fonction caractéristique de T_n. En déduire que T_n converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}(1-e^{itn})}{n(1-e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^{it} - 1)]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$