EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

Jeudi 17 Novembre 2024 (8h00-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Changement de variables continues (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur $]0,1[$, c'est-à-dire de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité du couple (X,Y) et représenter graphiquement le domaine sur lequel elle est non nulle.
2. On définit les deux variables aléatoires $Z = X^2 - Y$ et $T = Y$. Quelle est la loi du couple (Z,T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
3. Déterminer la loi marginale de Z. Vérifier que l'intégrale de cette densité est égale à 1 pour éviter une éventuelle erreur de calcul.
4. Déterminer la covariance du couple (Z,T) (on pourra utiliser le lien entre les variables Z et T et les variables X et Y). Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 : variables aléatoires gaussiennes indépendantes (4 points)

On considère trois variables aléatoires indépendantes X, Y et Z de même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Quelle sont les lois du vecteur $\boldsymbol{V} = (X,Y,Z)^T$ et de la variable $W = 2X - Y + Z + 1$.
2. Déterminer les valeurs des couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telles que les variables W et $T = aX + bY$ soient indépendantes et que T soit une variable centrée réduite (c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance égale à 1).

Exercice 3 : Changement de variables discrètes (8 points)

On considère un couple de variables aléatoires binaires (X,Y) telle que la loi marginale de X est une loi de Bernoulli de paramètre p

$$\begin{aligned} P[X=1] &= p, \\ P[X=0] &= 1-p=q, \end{aligned}$$

avec $p \in]0,1[$ et dont les lois conditionnelles sont définies comme suit

$$\begin{aligned} P[Y=1\,|X=1] &= 0 \\ P[Y=0\,|X=1] &= 1 \\ P[Y=1\,|X=0] &= \alpha \\ P[Y=0\,|X=0] &= 1-\alpha \end{aligned}$$

avec $\alpha \in]0,1[$.

1. Quelle est la loi du couple (X, Y) ? En déduire la loi de Y.
2. Déterminer la covariance du couple (X, Y).
3. On effectue le changement de variables $U = Y - X$ et $Z = Y + X$. Quelle est la loi du couple (U, Z) ? En déduire les lois marginales de Z et de U.
4. On pose $T = Z + W$, où W est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante de Z. Déterminer les lois conditionnelles de $T\,|Z = 0$ et de $T\,|Z = 1$ (c'est-à-dire les lois conditionnelles de T sachant $Z = 0$ et sachant $Z = 1$). Déterminer $P\,[T < t]\,, \forall t \in \mathbb{R}$ et en déduire la densité de T. Représenter graphiquement cette densité.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0,1,\ldots,n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0,1,\ldots,n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : np_jq_j Covariance : $-np_jp_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi_2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)