EXAMEN PROBABILITÉS - 1MF2E

Lundi 17 Novembre 2025 (8h00-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Changement de variables continues (8 points)

On considère un couple de deux variables aléatoires X et Y de de densité

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{xy}} \text{ si } 0 < y < x < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. On définit les deux variables aléatoires $Z = X$ et $T = \frac{Y}{X}$. Quelle est la loi du couple (Z, T) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement).
3. Déterminer la loi marginale de T et montrer que c'est une loi beta dont on déterminera les paramètres. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la covariance du couple (X, Y).
5. Déterminer la loi conditionnelle de $Y|X$ et sa moyenne $E[Y|X]$. En déduire $E[Y]$ en utilisant le théorème des espérances conditionnelles.

Exercice 2 : Théorème central limite (5 points)

On considère une variable aléatoire continue X de densité

$$p(x,.) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} \text{ si } x \in]0, \theta[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $\theta > 0$.

1. Déterminer la loi de la variable $Y = \frac{X}{\theta}$ et en déduire à l'aide des tables la moyenne et la variance de la variable aléatoire X.
2. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ de même loi que X et on construit la variable aléatoire
$$Y_n = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
Déterminer la moyenne et la variance de Y_n et sa loi limite issue du théorème central limite. En déduire que $\sqrt{n}(Y_n - \theta)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale dont on précisera les paramètres.

Exercice 3 : Lois binomiales corrélées (7 points)

On considère trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 et X_3 de même loi binomiale $B(n,p)$ et on construit les deux variables aléatoires $Z = X_1 + X_2$ et $T = X_1 + X_3$.

1. Montrer que les lois de Z et T sont également des lois binomiales dont on déterminera les paramètres (on pourra déterminer les fonctions caractéristiques de Z et T).

2. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple (Z,T).

3. Déterminer la probabilité conditionnelle $P[Z = k, T = l|X_1 = m]$ en précisant les valeurs possibles de m et de (k,l). En déduire le résultat suivant :

$$P[Z = k, T = l] = \sum_{m=0}^{\min(k,l)} \binom{n}{k-m}\binom{n}{l-m}\binom{n}{m} p^{k+l-m} q^{3n+m-k-l}.$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

4. On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $U = Z - T$ et montrer qu'elle s'écrit

$$\Phi_U(t) = \sum_{k=-2}^{2} p_k e^{ikt}, t \in \mathbb{R}.$$

En déduire que U est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-2, -1, 0, +1, +2\}$ et déterminées les probabilités associées.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1!\dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	Expression compliquée
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},\ \Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	Expression compliquée
Pareto $P(a,b)$	$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]a, +\infty[$	$\frac{ab}{b-1}$	$\frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$	Expression compliquée