Variables aléatoires réelles

Exercice 1 : Loi uniforme.
Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue et strictement croissante. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = F(X)$. En déduire la loi de Y et l'application qui découle de ce résultat.

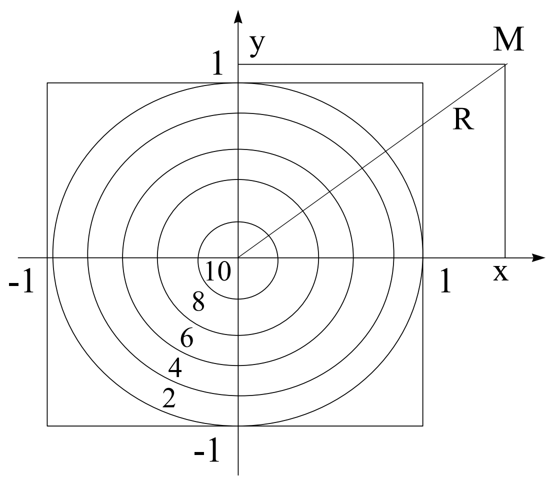
Exercice 2 : Loi binomiale - loi normale
Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. On peut considérer que le couple (X, Y) définit les coordonnées cartésiennes d'un point aléatoire M du plan. On s'intéresse aux performances d'un tireur à l'arc. Une cible est constituée de disques concentriques de rayons successifs : 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 et 1 unité. La cible est dessinée sur un carton carré de 2 unités de coté. On décide de modéliser le point d'impact de la flèche par le point aléatoire M de coordonnées cartésiennes (X, Y). La figure ci-dessous résume les notations. Dans ce modèle, l'indépendance des variables aléatoires X et Y s'interprète en disant que la dispersion horizontale du tir n'a pas d'influence sur sa dispersion verticale. Le choix d'une loi symétrique pour le couple (X, Y) s'interprète en disant que les points d'impact vont se répartir de façon symétrique autour du point $(0, 0)$.

a) Préciser rapidement la loi de la variable aléatoire $\frac{X}{\sigma}$. Exprimer la probabilité

$$q = P\left[\{-1 \leq X \leq 1\} \cap \{-1 \leq Y \leq 1\}\right]$$

à l'aide de σ et de la fonction de répartition F de la loi normale $N(0, 1)$. Evaluer q pour $\sigma = \frac{1}{2}$. Exprimer à l'aide de X et Y l'événement “la flèche n'atteint pas le carton” (elle est perdue dans la végétation). En déduire une expression de la probabilité p de cet événement.

b) On effectue $n = 100$ tirs. On complète notre modèle en introduisant une variable aléatoire N à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ qui modélise le nombre de flèches perdues, chaque tir étant supposé indépendant des autres. Quelle est la loi de N ? Déterminer $E[N]$ ($E[N]$ représente en moyenne le nombre de flèches perdues).



Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$\begin{array}{ll} f(x) = kx^a & x \in [0,1] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

où a est un paramètre réel strictement positif fixé.

1) Calculer la valeur de k.

2) Calculer $E\left(X^n\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $E\left(X\right)$ et $Var(X)$.

3) Déterminer la fonction de répartition de X.

On considère une nouvelle variable aléatoire $Y = -\ln X$ pour $X \neq 0$.

4) Déterminer la densité de probabilité de Y.

5) Reprendre la question 2) pour Y.

On considère enfin la variable aléatoire $Z = \left|X - \frac{1}{2}\right|$.

6) Déterminer la loi de Z.

Applications aux sciences du numérique

Exercice 4 : loi de Poisson

Le nombre de personnes se connectant à un serveur pendant un intervalle de temps Δ peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Chacune de ces personnes a la probabilité $p \in]0,1[$ de se faire déconnecter du serveur pour une raison indépendante de sa volonté (problèmes de réseau, ...). On note Y le nombre de personnes déconnectées pendant l'intervalle de temps Δ. Déterminer la loi de Y. En déduire E(Y) et Var(Y).

Exercice 5 : Files d'attente

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ (c'est-à-dire $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $f(y) = \mu \exp(-\mu y) 1_{\mathbb{R}^+}(y)$ où $1_{\mathbb{R}^+}(x)$ est la fonction indicatrice définie sur $\mathbb{R}^+$). Déterminer la fonction de répartition de $T = \inf\left(X, Y\right)$ et en déduire la loi de T.

Application

Trois clients A, B et C se présentent à deux guichets libres. A et B entrent en service et C attend que l'un des deux guichets se libère puis entre en service. On suppose que les temps de service de A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_A, λ_B et λ_C.

1) Quelle est la loi du temps d'attente de C ?

2) Quel est le temps moyen d'attente de C ?

3) Quel est le temps moyen passé par C dans le système (attente + service) ?

Réponses

Exercice 1

Il est clair que pour $t<0$, $P[Y<t]=0$ et que pour $t>1$, $P[Y<t]=1$

De plus, pour $t\in[0,1]$, on a

$$P[Y<t]=P[F(X)<t]=P\left[X<F^{-1}(t)\right]=F\left[F^{-1}(t)\right]=t$$

Donc Y suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Application : si on veut générer une réalisation d'une variable aléatoire de fonction de répartition F, puisqu'on sait que $F(X)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$, on effectue un tirage selon une loi uniforme y et on fait $x=F^{-1}(y)$. Bien sûr, ceci nécessite de pouvoir calculer $F^{-1}(y)$, ce qui n'est pas toujours possible.

Exercice 2

$\frac{X}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1)$

Donc,

$$\begin{aligned} q &= P[\{-1\leq X\leq 1\}\cap\{-1\leq Y\leq 1\}] \\ &= P\left[\left\{-\frac{1}{\sigma}\leq\frac{X}{\sigma}\leq\frac{1}{\sigma}\right\}\cap\left\{-\frac{1}{\sigma}\leq\frac{Y}{\sigma}\leq\frac{1}{\sigma}\right\}\right] \\ &= \left[F\left(\frac{1}{\sigma}\right)-F\left(-\frac{1}{\sigma}\right)\right]^2 \\ &= \left[2F\left(\frac{1}{\sigma}\right)-1\right]^2 \end{aligned}$$

Pour $\sigma=0.5$, on a $q=[2F(2)-1]^2=[2\times 0.9772-1]^2$.

On a

$$\begin{aligned} p &= P[\text{“la flèche n'atteint pas le carton”}] \\ &= P\left[\overline{\{-1\leq X\leq 1\}\cap\{-1\leq Y\leq 1\}}\right] \\ &= 1-q \end{aligned}$$

N suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(100,p)$ et $E[N]=100p$

Exercice 3

1) $\int_0^1 kx^a dx=1$ donc $k=a+1$

2) $E[X^n]=\int_0^1 kx^{a+n}dx=\frac{a+1}{a+n+1}$ donc $E[X]=\frac{a+1}{a+2}$ et $VarX=\frac{a+1}{a+3}-\left(\frac{a+1}{a+2}\right)^2$

3)

$$P[X<u]=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x>1 \\ \int_0^x ku^a du=x^{a+1} \text{ si } x\in[0,1] \end{cases}$$

4) $Y=-\ln X$ est un changement de variables bijectif de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}^+$

La densité de Y est

$$\begin{aligned} g(y) &= (a+1)\,e^{-ay}\left|-e^{-y}\right| \\ &= (a+1)\,e^{-(a+1)y}1_{\mathbb{R}^+}(y) \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} E[Y^n] &= \int_{\mathbb{R}^+} y^n\,(a+1)\,e^{-(a+1)y}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+}\left(\frac{u}{a+1}\right)^n e^{-u}du \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{(a+1)^n}=\frac{n!}{(a+1)^n} \end{aligned}$$

6) $Z = \left|X - \frac{1}{2}\right|$ est bijectif de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
$1^{ère}$ bijection : $Z = \frac{1}{2} - X \Longleftrightarrow X = \frac{1}{2} - Z$
La densité associée à cette bijection est

$$g_1(z) = (a+1)\left(\frac{1}{2} - z\right)^a$$

$2^{ème}$ bijection : $Z = X - \frac{1}{2} \Longleftrightarrow X = \frac{1}{2} + Z$
La densité associée à cette bijection est

$$g_2(z) = (a+1)\left(\frac{1}{2} + z\right)^a$$

La densité de Z est donc

$$g(z) = (a+1)\left[\left(\frac{1}{2} - z\right)^a + \left(\frac{1}{2} + z\right)^a\right] 1_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}(z)$$

Exercice 4

L'évènement "k personnes sont déconnectées du serveur" (qui correspond à $Y = k$) est la réunion des évènements E_i définis par "k personnes sont déconnectées du serveur et $k+i$ personnes sont connectées", $i \in \mathbb{N}$. Donc

$$\begin{aligned}
P[Y=k] &= \sum_{i=0}^{\infty} P[Y=k|\, X=k+i]\, P[X=k+i] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{k} p^k (1-p)^i \frac{\lambda^{k+i}}{(k+i)!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

donc Y suit une loi de Poisson de paramètre λp et $E[Y] = \text{var}[Y] = \lambda p$.

Exercice 5

La fonction de répartition de $T = \inf(X, Y)$ est

$$P[T < t] = P[\inf(X, Y) < t]$$

De façon évidente, on a $P[T < t] = 0$ si $t \leq 0$. Pour $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
P[T<t] &= P[\inf(X,Y) < t] \\
&= 1 - P[\inf(X,Y) \geq t] \\
&= 1 - P[X \geq t \text{ et } Y \geq t] \\
&= 1 - \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \int_t^{+\infty} \mu e^{-\mu u} du \\
&= 1 - e^{-\lambda t} e^{-\mu t} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}$$

En dérivant, on obtient la densité

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ (\lambda+\mu)\, e^{-(\lambda+\mu)t} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

On reconnait la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

Application

1. Si T_A et T_B désignent les temps de service de A et B, le temps d'attente de C est $\inf(T_A, T_B)$ qui d'après ce qui précède suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_A + \lambda_B$.

2. Le temps moyen d'attente de C est la moyenne d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda_A + \lambda_B$, soit
$$E[\inf(T_A, T_B)] = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B}.$$

3. Le temps moyen passé par C dans le système est le temps moyen d'attente + le temps moyen de service :
$$\frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} + \frac{1}{\lambda_C}.$$