TD 3 PROBABILITÉS - COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES - 1HY

Exercice 1 : Loi de Poisson et loi binomiale.
On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ, i.e., $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et une variable aléatoire Y telle que $Y|X = n$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$, i.e., $Y|X = n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On rappelle le résultat classique $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.
3. Montrer que $E[XY] = \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)$ (on pourra utiliser le théorème des espérances conditionnelles et le fait que la moyenne de $Y|X = n$ est connue).
4. Déterminer a tel que la covariance du couple $(X, Z = X + aY)$ soit nulle.

Exercice 2 : Tirages sans remise.
On considère une urne constituée de $N > 1$ boules numérotées de 1 à N. On tire deux boules sans remise dans cette urne. On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la seconde boule.

1. Déterminer les lois de X_1, X_2 et du couple (X_1, X_2) (on prendra soin de préciser les domaines de ces variables et vecteur aléatoires).
2. Déterminer la covariance entre X_1 et X_2. On rappelle que
$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n\,(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$
3. Déterminer la loi du couple (Z, U) avec $Z = X_1 - X_2$ et $U = X_1$ (on prendra soin de représenter graphiquement l'ensemble des valeurs possibles du couple (Z, U)). En déduire la loi de Z.

Exercice 3 : Décorrélation n'implique pas indépendance !
Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une variable aléatoire binaire prenant les valeurs $+1$ et -1 avec $P\,[Y = 1] = P\,[Y = -1] = \frac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Déterminer la covariance du couple (X, Z) notée $\mathrm{cov}(X, Z)$.
3. Calculer $P\,[X + Z = 0]$ et en déduire que X et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 : couple de variables aléatoires discrète et continue.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles telles que Y suit une loi exponentielle de paramètre c (de densité notée $g(y)$) et pour $y > 0$ la loi de X sachant $Y = y$ est la loi de Poisson de paramètre y

$$\begin{array}{cc} g(y) = ce^{-cy} & y > 0 \\ g(y) = 0 & y \leq 0 \\ P[X = k | Y = y] = \frac{y^k}{k!} e^{-y} & k \in \mathbb{N} \end{array}$$

Déterminer $P[X = k]$.

Exercice 5 : parties entières et fractionnaires
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$. Si k est un entier fixé ($k \in \mathbb{N}^*$), on définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante

$$\begin{aligned} X &= \text{Ent}(kU) \\ Y &= \text{Frac}(kU) = kU - \text{Ent}(kU) \end{aligned}$$

où $\text{Ent}(kU)$ et $\text{Frac}(kU)$ désignent les parties entières et fractionnaires de kU. Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la première de loi uniforme sur $\{0, ..., k-1\}$, la seconde de loi uniforme sur $[0, 1[$.

Réponses

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ, i.e., $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et une variable aléatoire Y telle que $Y|X = n$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$, i.e., $Y|X = n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que
$$\begin{aligned} P[X = n, Y = k] &= P[Y = k|X = n]P[X = n] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, \quad (k, n) \in \{0, ..., n\} \times \mathbb{N} \\ &= \frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda}, \quad (k, n) \in \{0, ..., n\} \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

2. Montrer que Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.
   On a pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} P[Y = k] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P[X = n, Y = k] \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \left[\frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda}\right], \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m+k}\right], \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m\right], \\ &= \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k. \end{aligned}$$
   On reconnait une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$, i.e., $Y \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

3. Montrer que $E[XY] = \frac{1}{2}\lambda(1 + \lambda)$ (on pourra utiliser le théorème des espérances conditionnelles).
   D'après le théorème des espérances conditionnelles
$$E[XY] = E_X\{E_Y[XY|X]\} = E_X\{XE_Y[Y|X]\} = E_X\left\{X \times \frac{X}{2}\right\} = \frac{1}{2}E[X^2].$$
   En effet comme la loi de $Y|X = n$ est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, son espérance est $E_Y[Y|X = n] = \frac{n}{2} = \frac{X}{2}$.
   Comme X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on en déduit
$$E[X^2] = \text{var}[X] + E^2[X] = \lambda + \lambda^2.$$
   d'où
$$E[XY] = \frac{\lambda(1 + \lambda)}{2}.$$

4. Déterminer a tel que la covariance du couple $(X, Z = X + aY)$ soit nulle.
   D'après ce qui précède, on a
$$E[X] = \lambda \text{ et } E[Z] = \lambda + a\frac{\lambda}{2} = \lambda\left(1 + \frac{a}{2}\right).$$

de plus

$$E[XZ] = E[X^2] + aE[XY] = \lambda + \lambda^2 + a\left[\frac{\lambda(1+\lambda)}{2}\right].$$

On en déduit

$$\mathrm{cov}(X,Z) = E[XZ] - E[X]E[Z] = \lambda\left[1 + \frac{a}{2}\right].$$

La covariance du couple (X, Z) est donc nulle si et seulement si $a = -2$.

Exercice 2

1) X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur $\{1, ..., N\}$ tandis que le couple (X_1, X_2) suit une loi uniforme sur $\{(i,j), i \in \{1,...,N\}, j \in \{1,...,N\}, i \neq j\}$, c'est-à-dire

$$P[X_1 = i, X_2 = j] = \frac{1}{N(N-1)} \qquad i \in \{1,...,N\}, j \in \{1,...,N\}, i \neq j$$

2) Il est clair que $E[X_1] = E[X_2] = \frac{N+1}{2}$. De plus

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= \sum_{i\neq j} ij \frac{1}{N(N-1)} \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} ij \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left[\sum_{i,j} ij - \sum_i i^2\right] \end{aligned}$$

Des calculs simples permettent d'obtenir

$$E[X_1X_2] = \frac{(N+1)(3N+2)}{12}$$

et par suite

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = -\frac{N+1}{12}.$$

3) Le changement de variables est tel que

$$\begin{cases} Z = X_1 - X_2 \\ U = X_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X_1 = U \\ X_2 = U - Z \end{cases}$$

donc il est bijectif de

$$\{(i,j), i = 1,...,N, j = 1,...,N, i \neq j\}$$

dans

$$\{(u,z), u \in \{1,...,N\}, z \in \{u-N, ..., u-1\}, z \neq 0\}$$

Le couple (Z, U) suit une loi uniforme sur son ensemble de définition.
Z est à valeurs dans $\{-(N-1), ..., -2, -1\} \cup \{1, 2, ..., N-1\}$ et
On a

$$P[Z = z] = \frac{N - |z|}{N(N-1)} \qquad z \in \{-(N-1), ..., -2, -1\} \cup \{1, 2, ..., N-1\}.$$

Exercice 3

1) On détermine la fonction de répartition de Z

$$\begin{aligned} P[Z < z] &= P[XY < z] \\ &= P[X < z, Y = 1] + P[-X < z, Y = -1]. \end{aligned}$$

Puisque X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P[Z<z] &= P[X<z]\,P[Y=1]+P[X>-z]\,P[Y=-1] \\ &= F(z)\times\frac{1}{2}+F(z)\times\frac{1}{2} \\ &= F(z) \end{aligned}$$

où $F(z)$ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donc $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$.

2) La covariance du couple (X,Z) est définie par

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Z) &= E[XZ]-E[X]\,E[Z] \\ &= E\left[X^2Y\right]-E[X]\,E[XY]. \end{aligned}$$

Puisque $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, on a $E[X]=0$ et$E\left[X^2\right]=1$. De plus $E[Y]=0$ (Y prend les valeurs $+1$ et -1 de manière équiprobable), d'où en utilisant l'indépendance entre les variables X et Y

$$\operatorname{cov}(X,Z)=0.$$

3) La probabilité recherchée s'écrit

$$\begin{aligned} P[X+Z=0] &= P[X+XY]=0 \\ &= P[X(1+Y)=0] \\ &= P[Y=-1]=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a une chance sur 2 d'avoir $Z=-X$, donc X et Z ne sont pas indépendantes même si $\operatorname{cov}(X,Z)=0$. Ceci est un exemple de couple de variables aléatoires non indépendantes de covariance nulle

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est d'étudier un exemple de couple de variables aléatoires (X,Y) tel que l'une des deux variables Y est discrète tandis que l'autre variable X est continue. En utilisant les résultats concernant les probabilités conditionnelles, on obtient

$$\begin{aligned} P[Y=k] &= \int_{\mathbb{R}} P[X=k|Y=y]g(y)dy \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{y^k}{k!}e^{-y}\times ce^{-cy}dy \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{cy^k}{k!}e^{-(c+1)y}dy. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $u=(c+1)y$, on obtient

$$\begin{aligned} P[Y=k] &= \int_0^{+\infty}\frac{c}{k!}\frac{u^k}{(c+1)^k}e^{-u}\times\frac{du}{c+1} \\ &= \frac{c}{(c+1)^{k+1}},\ k\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\Gamma(k+1)=\int_0^{+\infty}u^ke^{-u}du=k!.$$

Exercice 5

Loi de X

Il est clair que X est à valeurs dans $\{0, ..., k-1\}$. De plus

$$\begin{aligned} P[X=i] &= P[i \leq kU < i+1] \\ &= P\left[\frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} du = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Donc X suit la loi uniforme sur $\{0, ..., k-1\}$

Loi de Y

Il est clair que Y est à valeurs dans $[0,1[$.

Pour $y < 0$, il est clair que $P[Y < y] = 0$

Pour $y \geq 1$, il est clair que $P[Y < y] = 1$

Pour $y \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned} P[Y<y] &= P\left[\bigcup_{i=0}^{k-1}\{Y<y, X=i\}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P[Y<y, X=i] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P[kU-i<y, i \leq kU < i+1] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P\left[U < \frac{y+i}{k}, \frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P\left[\frac{i}{k} \leq U < \frac{y+i}{k}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y}{k} = y \end{aligned}$$

Donc Y suit la loi uniforme sur $[0,1[$.

Indépendance de X et de Y

Pour montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, il suffit de montrer que

$$P[X=i, Y<y] = P[X=i]\,P[Y<y] \qquad \forall i \in \{0, ..., k-1\}, \forall y \in [0,1[.$$

Or

$$\begin{aligned} P[X=i, Y<y] &= P[i \leq kU < i+1, kU-i<y] \\ &= P\left[U < \frac{y+i}{k}, \frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \frac{y}{k} \text{ (d'après ce qui précède).} \end{aligned}$$

On a bien $P[X=i, Y<y] = P[X=i]\,P[Y<y]$, ce qui signifie que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.