

**Exercice 1 : Loi de Poisson et loi binomiale.**

On considère une variable aléatoire  $X$  de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , i.e.,  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et une variable aléatoire  $Y$  telle que  $Y|X = n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{2}$ , i.e.,  $Y|X = n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ . On rappelle le résultat classique  $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Montrer que  $Y$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\frac{\lambda}{2})$ .
3. Montrer que  $E[XY] = \frac{1}{2}\lambda(1 + \lambda)$  (on pourra utiliser le théorème des espérances conditionnelles et le fait que la moyenne de  $Y|X = n$  est connue).
4. Déterminer  $a$  tel que la covariance du couple  $(X, Z = X + aY)$  soit nulle.

**Exercice 2 : Tirages sans remise.**

On considère une urne constituée de  $N > 1$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On tire deux boules sans remise dans cette urne. On note  $X_1$  le numéro de la première boule et  $X_2$  le numéro de la seconde boule.

1. Déterminer les lois de  $X_1, X_2$  et du couple  $(X_1, X_2)$  (on prendra soin de préciser les domaines de ces variables et vecteur aléatoires).
2. Déterminer la covariance entre  $X_1$  et  $X_2$ . On rappelle que

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Déterminer la loi du couple  $(Z, U)$  avec  $Z = X_1 - X_2$  et  $U = X_1$  (on prendra soin de représenter graphiquement l'ensemble des valeurs possibles du couple  $(Z, U)$ ). En déduire la loi de  $Z$ .

**Exercice 3 : Décorrélation n'implique pas indépendance !**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y$  une variable aléatoire binaire prenant les valeurs  $+1$  et  $-1$  avec  $P[Y = 1] = P[Y = -1] = \frac{1}{2}$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et on pose  $Z = XY$ .

1. Déterminer la loi de  $Z$ .
2. Déterminer la covariance du couple  $(X, Z)$  notée  $\text{cov}(X, Z)$ .
3. Calculer  $P[X + Z = 0]$  et en déduire que  $X$  et  $Z$  ne sont pas indépendantes.

**Exercice 4 : couple de variables aléatoires discrète et continue.**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles telles que  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $c$  (de densité notée  $g(y)$ ) et pour  $y > 0$  la loi de  $X$  sachant  $Y = y$  est la loi de Poisson de paramètre  $y$

$$\begin{aligned}g(y) &= ce^{-cy} & y > 0 \\g(y) &= 0 & y \leq 0 \\P[X = k | Y = y] &= \frac{y^k}{k!} e^{-y} & k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Déterminer  $P[X = k]$ .

**Exercice 5 : parties entières et fractionnaires**

Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1[$ . Si  $k$  est un entier fixé ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), on définit les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de la façon suivante

$$\begin{aligned}X &= \text{Ent}(kU) \\Y &= \text{Frac}(kU) = kU - \text{Ent}(kU)\end{aligned}$$

où  $\text{Ent}(kU)$  et  $\text{Frac}(kU)$  désignent les parties entières et fractionnaires de  $kU$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, la première de loi uniforme sur  $\{0, \dots, k-1\}$ , la seconde de loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

## Réponses

### Exercice 1

On considère une variable aléatoire  $X$  de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , i.e.,  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et une variable aléatoire  $Y$  telle que  $Y|X = n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{2}$ , i.e.,  $Y|X = n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .

$(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$  tel que

$$\begin{aligned} P[X = n, Y = k] &= P[Y = k|X = n]P[X = n] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad (k, n) \in \{0, \dots, n\} \times \mathbb{N} \\ &= \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda}, \quad (k, n) \in \{0, \dots, n\} \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

2. Montrer que  $Y$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\frac{\lambda}{2})$ .

On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P[Y = k] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P[X = n, Y = k] \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \left[ \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda} \right], \\ &= e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m+k} \right], \\ &= e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^m \right], \\ &= \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre  $\frac{\lambda}{2}$ , i.e.,  $Y \sim \mathcal{P}(\frac{\lambda}{2})$ .

3. Montrer que  $E[XY] = \frac{1}{2}\lambda(1 + \lambda)$  (on pourra utiliser le théorème des espérances conditionnelles).  
D'après le théorème des espérances conditionnelles

$$E[XY] = E_X\{E_Y[XY|X]\} = E_X\{XE_Y[Y|X]\} = E_X\left\{X \times \frac{X}{2}\right\} = \frac{1}{2}E[X^2].$$

En effet comme la loi de  $Y|X = n$  est une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ , son espérance est  $E_Y[Y|X = n] = \frac{n}{2} = \frac{X}{2}$ .

Comme  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , on en déduit

$$E[X^2] = \text{var}[X] + E^2[X] = \lambda + \lambda^2.$$

d'où

$$E[XY] = \frac{\lambda(1 + \lambda)}{2}.$$

4. Déterminer  $a$  tel que la covariance du couple  $(X, Z = X + aY)$  soit nulle.  
D'après ce qui précède, on a

$$E[X] = \lambda \text{ et } E[Z] = \lambda + a\frac{\lambda}{2} = \lambda \left(1 + \frac{a}{2}\right).$$

de plus

$$E[XZ] = E[X^2] + aE[XY] = \lambda + \lambda^2 + a \left[ \frac{\lambda(1+\lambda)}{2} \right].$$

On en déduit

$$\text{cov}(X, Z) = E[XZ] - E[X]E[Z] = \lambda \left[ 1 + \frac{a}{2} \right].$$

La covariance du couple  $(X, Z)$  est donc nulle si et seulement si  $a = -2$ .

### Exercice 2

1)  $X_1$  et  $X_2$  suivent des lois uniformes sur  $\{1, \dots, N\}$  tandis que le couple  $(X_1, X_2)$  suit une loi uniforme sur  $\{(i, j), i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j\}$ , c'est-à-dire

$$P[X_1 = i, X_2 = j] = \frac{1}{N(N-1)} \quad i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j$$

2) Il est clair que  $E[X_1] = E[X_2] = \frac{N+1}{2}$ . De plus

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \sum_{i \neq j} ij \frac{1}{N(N-1)} \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} ij \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left[ \sum_{i,j} ij - \sum_i i^2 \right] \end{aligned}$$

Des calculs simples permettent d'obtenir

$$E[X_1 X_2] = \frac{(N+1)(3N+2)}{12}$$

et par suite

$$\text{cov}(X_1, X_2) = -\frac{N+1}{12}.$$

3) Le changement de variables est tel que

$$\begin{cases} Z = X_1 - X_2 \\ U = X_1 \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = U \\ X_2 = U - Z \end{cases}$$

donc il est bijectif de

$$\{(i, j), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, i \neq j\}$$

dans

$$\{(u, z), u \in \{1, \dots, N\}, z \in \{u-N, \dots, u-1\}, z \neq 0\}$$

Le couple  $(Z, U)$  suit une loi uniforme sur son ensemble de définition.

$Z$  est à valeurs dans  $\{-(N-1), \dots, -2, -1\} \cup \{1, 2, \dots, N-1\}$  et

On a

$$P[Z = z] = \frac{N-|z|}{N(N-1)} \quad z \in \{-(N-1), \dots, -2, -1\} \cup \{1, 2, \dots, N-1\}.$$

### Exercice 3

1) On détermine la fonction de répartition de  $Z$

$$\begin{aligned} P[Z < z] &= P[XY < z] \\ &= P[X < z, Y = 1] + P[-X < z, Y = -1]. \end{aligned}$$

Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P[Z < z] &= P[X < z]P[Y = 1] + P[X > -z]P[Y = -1] \\ &= F(z) \times \frac{1}{2} + F(z) \times \frac{1}{2} \\ &= F(z) \end{aligned}$$

où  $F(z)$  est la fonction de répartition de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Donc  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

2) La covariance du couple  $(X, Z)$  est définie par

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Z) &= E[XZ] - E[X]E[Z] \\ &= E[X^2Y] - E[X]E[XY]. \end{aligned}$$

Puisque  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , on a  $E[X] = 0$  et  $E[X^2] = 1$ . De plus  $E[Y] = 0$  ( $Y$  prend les valeurs  $+1$  et  $-1$  de manière équiprobable), d'où en utilisant l'indépendance entre les variables  $X$  et  $Y$

$$\text{cov}(X, Z) = 0.$$

3) La probabilité recherchée s'écrit

$$\begin{aligned} P[X + Z = 0] &= P[X + XY] = 0 \\ &= P[X(1 + Y) = 0] \\ &= P[Y = -1] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a une chance sur 2 d'avoir  $Z = -X$ , donc  $X$  et  $Z$  ne sont pas indépendantes même si  $\text{cov}(X, Z) = 0$ . Ceci est un exemple de couple de variables aléatoires non indépendantes de covariance nulle

#### Exercice 4

L'objectif de cet exercice est d'étudier un exemple de couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  tel que l'une des deux variables  $Y$  est discrète tandis que l'autre variable  $X$  est continue. En utilisant les résultats concernant les probabilités conditionnelles, on obtient

$$\begin{aligned} P[Y = k] &= \int_{\mathbb{R}} P[X = k|Y = y]g(y)dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{y^k}{k!} e^{-y} \times ce^{-cy} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{cy^k}{k!} e^{-(c+1)y} dy. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables  $u = (c + 1)y$ , on obtient

$$\begin{aligned} P[Y = k] &= \int_0^{+\infty} \frac{c}{k!} \frac{u^k}{(c+1)^k} e^{-u} \times \frac{du}{c+1} \\ &= \frac{c}{(c+1)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!.$$

#### Exercice 5

**Loi de  $X$**

Il est clair que  $X$  est à valeurs dans  $\{0, \dots, k-1\}$ . De plus

$$\begin{aligned} P[X = i] &= P[i \leq kU < i+1] \\ &= P\left[\frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} du = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Donc  $X$  suit la loi uniforme sur  $\{0, \dots, k-1\}$

### Loi de $Y$

Il est clair que  $Y$  est à valeurs dans  $[0, 1[$ .

Pour  $y < 0$ , il est clair que  $P[Y < y] = 0$

Pour  $y \geq 1$ , il est clair que  $P[Y < y] = 1$

Pour  $y \in [0, 1[$ , on a

$$\begin{aligned} P[Y < y] &= P\left[\bigcup_{i=0}^{k-1} \{Y < y, X = i\}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P[Y < y, X = i] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P[kU - i < y, i \leq kU < i+1] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P\left[U < \frac{y+i}{k}, \frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P\left[\frac{i}{k} \leq U < \frac{y+i}{k}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y}{k} = y \end{aligned}$$

Donc  $Y$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

### Indépendance de $X$ et de $Y$

Pour montrer que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, il suffit de montrer que

$$P[X = i, Y < y] = P[X = i] P[Y < y] \quad \forall i \in \{0, \dots, k-1\}, \forall y \in [0, 1[.$$

Or

$$\begin{aligned} P[X = i, Y < y] &= P[i \leq kU < i+1, kU - i < y] \\ &= P\left[U < \frac{y+i}{k}, \frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\ &= \frac{y}{k} \text{ (d'après ce qui précède).} \end{aligned}$$

On a bien  $P[X = i, Y < y] = P[X = i] P[Y < y]$ , ce qui signifie que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes.