TD 4 Probabilités - Couples de Variables Aléatoires Continues - 1HY

Exercice 1 : un vecteur non-gaussien de lois marginales gaussiennes.
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = k\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer k.
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y
3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer la covariance du couple (X,Y) notée $\text{cov}(X,Y)$.
5) Déterminer les lois de $Z = X + Y$ et de $U = X - Y$ en fonction de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ notée $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.
6) Déterminer la loi de $T = Y/X$.

Exercice 2 : Simulation de variables aléatoires normales. Méthode de Box-Müller.
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de mêmes lois uniformes sur $]0,1]$. On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante

$$\begin{array}{rcl} X & = & \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V) \\ Y & = & \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V) \end{array}$$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Application ?

Exercice 3 : couple de variables aléatoires continues.
Soit $\theta > 0$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\right\}$. Un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles a pour densité

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} & (x,y) \in D \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Réponses

Exercice 1

1) L'intégrale d'une densité de probabilité étant égale à 1, on en déduit

$$k = \left[\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^-} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy\right]^{-1}.$$

Par symétrie, on en déduit

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^-} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy &= 2\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy \\
&= 2\left[\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right]^2 \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right]^2 \\
&= 2\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right]^2 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

d'où

$$k = \frac{1}{\pi}.$$

2) En observant la forme du domaine de définition du couple, on en déduit que X et Y sont toutes deux à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus

$$p(x,.) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^+} p(x,y)dy \text{ si } x > 0 \\ \int_{\mathbb{R}^-} p(x,y)dy \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

On effectue le calcul pour $x > 0$ (le résultat sera le même pour $x < 0$ par symétrie) et on obtient

$$\begin{aligned}
p(x,.) &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

qui est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Puisque le résultat est identique pour $x < 0$, on en déduit

$$X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Par symétrie, on obtient

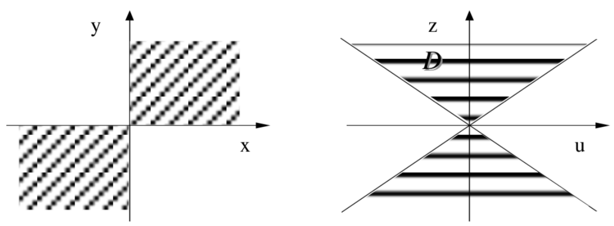
$$Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Cet exemple très classique montre qu'un couple (X,Y) peut être non gaussien même si les lois marginales de X et Y sont gaussiennes.

3) Si les variables X et Y étaient indépendantes, on aurait $p(x,y) = p(x,.)p(.,y), \forall x,y$ et donc comme $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, on aurait

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right], \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme ce n'est pas le cas, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
4) Par définition
$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$
Puisque $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $E[X]=0$ et donc
$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] = \int\int_{\mathbb{R}^2} xyp(x,y)dxdy.$$
Par symétrie
$$\mathrm{cov}(X,Y) = 2\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} xyp(x,y)dxdy.$$
Des calculs élémentaires permettent d'obtenir
$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty xy\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dy \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right]^2 \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{+\infty}\right\}^2 \\
&= \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$
5) Le changement de variables
$$\left\{\begin{array}{l} Z = X+Y \\ U = X-Y \end{array}\right.$$
est bijectif car on a $X=\frac{Z+U}{2}$ et $Y=\frac{Z-U}{2}$. Le domaine de définition du couple (Z,U) noté D est représenté sur la figure ci-dessous



La matrice Jacobienne de ce changement de variables est
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
d'où $|\det(J)| = \frac{1}{2}$. La densité du couple (Z,U) est donc
$$g(z,u) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{4}(z^2+u^2)\right] \quad \text{si } (z,u)\in D \\ 0 \text{ sinon.} \end{array}\right.$$

Les lois marginales de Z et de U s'obtiennent par intégration de $g(z,u)$

$$\begin{aligned} g(z,.) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)\int_{-|z|}^{|z|}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)du \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $v=\frac{u}{\sqrt{2}}$, on obtient

$$g(z,.)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)\left[\Phi\left(\frac{|z|}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{|z|}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad z\in\mathbb{R}.$$

La loi marginale de U se détermine de manière similaire

$$\begin{aligned} g(.,u) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)\left[\int_{-\infty}^{-|u|}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)dz+\int_{|u|}^{+\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)\right]dz \end{aligned}$$

soit

$$g(.,u)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)\Phi\left(-\frac{|u|}{\sqrt{2}}\right),\ u\in\mathbb{R}.$$

On remarquera que $Z=X+Y$ et $U=X+Y$ ne suivent pas des lois normales, alors que X et Y suivent toutes les deux des lois normales.
6) On peut effectuer un changement de variables après avoir introduit une variable auxiliaire. Mais peut-être plus simplement, on peut calculer la fonction de répartition de T

$$P\left[T<t\right]=P\left[\frac{Y}{X}<t\right]=P\left[Y<tX,X>0\right]+P\left[Y>tX,X<0\right].$$

Puisque Y et X sont de même signe, on a $P\left[T<t\right]=0$ pour $t<0$. De plus, pour $t>0$

$$\begin{aligned} P\left[T<t\right] &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{tx}ke^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy\right]dx+\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{tx}^{0}ke^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy\right]dx \\ &= 2\int_0^{+\infty}ke^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int_0^{tx}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]dx. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à t, on obtient la densité de T

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\int_0^{+\infty}ke^{-\frac{x^2}{2}}\left[xe^{-\frac{t^2x^2}{2}}\right]dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{\left(t^2+1\right)x^2}{2}}dx \end{aligned}$$

soit

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\left[-e^{-\frac{\left(t^2+1\right)x^2}{2}}\right]_0^{+\infty}}{t^2+1}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{t^2+1}1_{\mathbb{R}^+}(t)$$

On vérifie que

$$\int_{R^+}\frac{2}{\pi}\frac{1}{t^2+1}dt=1.$$

Exercice 2

Le changement de variables se décompose comme suit

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-2\ln U} = R \\ 2\pi V = \Theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R\cos\Theta = X \\ R\sin\Theta = Y \end{pmatrix}$$

La première application est bijective de $]0,1] \times]0,1]$ dans $\mathbb{R}^+ \times]0,2\pi]$

La deuxième application est bijective de $\mathbb{R}^{+*} \times [0,2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

On a classiquement

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2+Y^2} \\ \Theta &= \arctan\left[\frac{Y}{X}\right] + k\pi \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{2}\right) \\ V &= \frac{1}{2\pi}\left[\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) + k\pi\right] \end{aligned}$$

Le jacobien de la transformation est défini par

$$J = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

D'où la densité du couple (X,Y)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} 1_{\mathbb{R}^2}(x,y).$$

X et Y sont donc deux variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$. Ce résultat est utile car il permet de générer des variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ à partir de lois uniformes indépendantes.

Exercice 3

1) Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} f(x,.) &= \theta^2 x e^{-\theta x} 1_{\mathbb{R}^+}(x) \\ f(.,y) &= \theta e^{-\theta y} 1_{\mathbb{R}^+}(y) \end{aligned}$$

Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre θ et X suit une loi gamma $\Gamma(\theta, 2)$.

2) On pose

$$\begin{cases} Z = \dfrac{Y}{X} \\ T = X \end{cases}$$

Le changement de variables est bijectif de D dans $]0,1[\times \mathbb{R}^+$. Le Jacobien est $|J| = t$ et la densité du couple (Z,T) est

$$g(z,t) = t\theta^2 e^{-\theta t} 1_{]0,1[\times\mathbb{R}^+}(z,t).$$

Par intégration, on en déduit que Z suit une loi uniforme sur $]0,1[$ et que T suit une loi gamma $\Gamma(\theta, 2)$. Les variables Z et T sont indépendantes.