

**Exercice 1 : un vecteur non-gaussien de lois marginales gaussiennes.**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de densité :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= k \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \\ f(x, y) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

- 1) Calculer  $k$ .
- 2) Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$
- 3) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- 4) Calculer la covariance du couple  $(X, Y)$  notée  $\text{cov}(X, Y)$ .
- 5) Déterminer les lois de  $Z = X + Y$  et de  $U = X - Y$  en fonction de  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$
- 6) Déterminer la loi de  $T = Y/X$ .

**Exercice 2 : Simulation de variables aléatoires normales. Méthode de Box-Müller.**

Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes de mêmes lois uniformes sur  $]0, 1[$ . On définit les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V) \\ Y &= \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V) \end{aligned}$$

Montrer que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Application ?

**Exercice 3 : couple de variables aléatoires continues.**

Soit  $\theta > 0$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}$ . Un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \theta^2 e^{-\theta x} & (x, y) \in D \\ f(x, y) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

- 1) Calculer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- 2) Calculer la loi de  $Z = Y/X$  et montrer que les variables aléatoires  $X$  et  $Z$  sont indépendantes.

## Applications aux sciences du numérique

### Exercice 4 : Lois de Rayleigh et de Rice

On considère un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  où  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

1) Déterminer la loi du couple  $(R, \Theta)$  puis les lois marginales de  $R$  et de  $\Theta$  lorsque

$$\begin{cases} X = R \cos \Theta \\ Y = R \sin \Theta \end{cases}$$

Que peut on en conclure sur la dépendance des va  $R$  et  $\Theta$  ?

*Remarque* : on dit que  $R$  suit la loi de Rayleigh et on vérifie que sa moyenne et sa variance vérifient  $E[R] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$  et  $Var[R] = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2$ .

2) Mêmes questions que précédemment lorsque  $X$  et  $Y$  sont deux va indépendantes de lois respectives  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . On exprimera les résultats à l'aide de la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \varphi} d\varphi$$

et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

*Remarque* : on dit que  $R$  suit la loi de Rice et on vérifie que  $X$  et  $Y$  sont des va indépendantes si et seulement si  $m = 0$ .

**Application** : vous verrez plus tard que la modélisation d'un bruit blanc Gaussien centré à bande étroite conduit au signal

$$\begin{aligned} b(t) &= X(t) \cos(2\pi f_0 t) - Y(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ &= R(t) \cos(2\pi f_0 t + \Theta) \end{aligned}$$

À chaque instant  $t$ ,  $R(t)$  représente l'amplitude du signal reçu dont il est important de connaître les propriétés statistiques.

# Réponses

## Exercice 1

1) L'intégrale d'une densité de probabilité étant égale à 1, on en déduit

$$k = \left[ \int \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy \right]^{-1}.$$

Par symétrie, on en déduit

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy &= 2 \int \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy \\ &= 2 \left[ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right]^2 \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right]^2 \\ &= 2 \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right]^2 \\ &= \pi \end{aligned}$$

d'où

$$k = \frac{1}{\pi}.$$

2) En observant la forme du domaine de définition du couple, on en déduit que  $X$  et  $Y$  sont toutes deux à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . De plus

$$p(x, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^+} p(x, y) dy & \text{si } x > 0 \\ \int_{\mathbb{R}^-} p(x, y) dy & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On effectue le calcul pour  $x > 0$  (le résultat sera le même pour  $x < 0$  par symétrie) et on obtient

$$\begin{aligned} p(x, \cdot) &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

qui est la densité d'une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Puisque le résultat est identique pour  $x < 0$ , on en déduit

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Par symétrie, on obtient

$$Y \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Cet exemple très classique montre qu'un couple  $(X, Y)$  peut être non gaussien même si les lois marginales de  $X$  et  $Y$  sont gaussiennes.

3) Si les variables  $X$  et  $Y$  étaient indépendantes, on aurait  $p(x, y) = p(x, \cdot)p(\cdot, y)$ ,  $\forall x, y$  et donc comme  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , on aurait

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right], \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme ce n'est pas le cas, les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

4) Par définition

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Puisque  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , on a  $E[X] = 0$  et donc

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] = \int \int_{\mathbb{R}^2} xyp(x, y) dx dy.$$

Par symétrie

$$\text{cov}(X, Y) = 2 \int \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} xyp(x, y) dx dy.$$

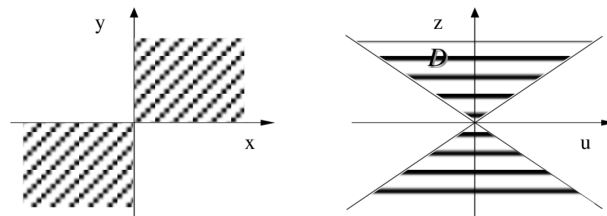
Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty xy \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dy \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right]^2 \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_0^{+\infty} \right\}^2 \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

5) Le changement de variables

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ U = X - Y \end{cases}$$

est bijectif car on a  $X = \frac{Z+U}{2}$  et  $Y = \frac{Z-U}{2}$ . Le domaine de définition du couple  $(Z, U)$  noté  $D$  est représenté sur la figure ci-dessous



La matrice Jacobienne de ce changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où  $|\det(J)| = \frac{1}{2}$ . La densité du couple  $(Z, U)$  est donc

$$g(z, u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{4}(z^2 + u^2)\right] & \text{si } (z, u) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les lois marginales de  $Z$  et de  $U$  s'obtiennent par intégration de  $g(z, u)$

$$\begin{aligned} g(z, \cdot) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z, u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \int_{-|z|}^{|z|} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) du \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables  $v = \frac{u}{\sqrt{2}}$ , on obtient

$$g(z, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \left[ \Phi\left(\frac{|z|}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{|z|}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad z \in \mathbb{R}.$$

La loi marginale de  $U$  se détermine de manière similaire

$$\begin{aligned} g(\cdot, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z, u) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \left[ \int_{-\infty}^{-|u|} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz + \int_{|u|}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz \right] \end{aligned}$$

soit

$$g(\cdot, u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \Phi\left(-\frac{|u|}{\sqrt{2}}\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

On remarquera que  $Z = X + Y$  et  $U = X - Y$  ne suivent pas des lois normales, alors que  $X$  et  $Y$  suivent toutes les deux des lois normales.

6) On peut effectuer un changement de variables après avoir introduit une variable auxiliaire. Mais peut-être plus simplement, on peut calculer la fonction de répartition de  $T$

$$P[T < t] = P\left[\frac{Y}{X} < t\right] = P[Y < tX, X > 0] + P[Y > tX, X < 0].$$

Puisque  $Y$  et  $X$  sont de même signe, on a  $P[T < t] = 0$  pour  $t < 0$ . De plus, pour  $t > 0$

$$\begin{aligned} P[T < t] &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{tx} k e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy \right] dx + \int_{-\infty}^0 \left[ \int_{tx}^0 k e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy \right] dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} k e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ \int_0^{tx} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] dx. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient la densité de  $T$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \int_0^{+\infty} k e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ x e^{-\frac{t^2 x^2}{2}} \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{(t^2+1)x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

soit

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\left[ -e^{-\frac{(t^2+1)x^2}{2}} \right]_0^{+\infty}}{t^2 + 1} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2 + 1} 1_{\mathbb{R}^+}(t)$$

On vérifie que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2 + 1} dt = 1.$$

### Exercice 2

Le changement de variables se décompose comme suit

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-2 \ln U} = R \\ 2\pi V = \Theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R \cos \Theta = X \\ R \sin \Theta = Y \end{pmatrix}$$

La première application est bijective de  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  dans  $]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$

La deuxième application est bijective de  $]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{axe } O_x^+\}$

On a classiquement

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \Theta &= \arctan \left[ \frac{Y}{X} \right] + k\pi \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} U &= \exp \left( -\frac{X^2 + Y^2}{2} \right) \\ V &= \frac{1}{2\pi} \left[ \arctan \left( \frac{Y}{X} \right) + k\pi \right] \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne de ce changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \exp \left( -\frac{x^2+y^2}{2} \right) & -y \exp \left( -\frac{x^2+y^2}{2} \right) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{-y}{1+\frac{y^2}{x^2}} & \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{x}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice Jacobienne est

$$\det(J) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^2}{x^2 + y^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \left[ -1 - \frac{y^2}{x^2} \right] = -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Le jacobien de la transformation est donc

$$|\det(J)| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

D'où la densité du couple  $(X, Y)$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} 1_{\mathbb{R}^2}(x, y).$$

$X$  et  $Y$  sont donc deux variables aléatoires indépendantes de lois normales  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Ce résultat est utile car il permet de générer des variables aléatoires indépendantes de lois normales  $\mathcal{N}(0, 1)$  à partir de lois uniformes indépendantes.

### Exercice 3

1) Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} f(x, \cdot) &= \theta^2 x e^{-\theta x} 1_{\mathbb{R}^+}(x) \\ f(\cdot, y) &= \theta e^{-\theta y} 1_{\mathbb{R}^+}(y) \end{aligned}$$

Donc  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\theta$  et  $X$  suit une loi gamma  $\Gamma(\theta, 2)$ .

2) On pose

$$\begin{cases} Z = \frac{Y}{X} \\ T = X \end{cases}$$

Le changement de variables est bijectif de  $D$  dans  $]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ . Le Jacobien est  $|J| = t$  et la densité du couple  $(Z, T)$  est

$$g(z, t) = t\theta^2 e^{-\theta t} 1_{]0, 1[ \times \mathbb{R}^+}(z, t).$$

Par intégration, on en déduit que  $Z$  suit une loi uniforme sur  $]0, 1[$  et que  $T$  suit une loi gamma  $\Gamma(\theta, 2)$ . Les variables  $Z$  et  $T$  sont indépendantes.

#### Exercice 4

1) On montre par un changement de variables standard que le couple  $(R, \Theta)$  possède la densité

$$f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} 1_{\mathbb{R}^+ \times ]0, 2\pi[}(r, \theta)$$

puis par intégration

$$\begin{aligned} f(r, \cdot) &= \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} 1_{\mathbb{R}^+}(r) \\ f(\cdot, \theta) &= \frac{1}{2\pi} 1_{]0, 2\pi[}(\theta) \end{aligned}$$

La loi de  $R$  est appelée loi de Rayleigh.

2) La densité du couple  $(R, \Theta)$  est

$$g(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2 - 2mr \cos \theta + m^2}{2\sigma^2}\right\} 1_{\mathbb{R}^+ \times ]0, 2\pi[}(r, \theta)$$

puis par intégration

$$\begin{aligned} f(r, \cdot) &= \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + m^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{mr}{\sigma^2}\right) 1_{\mathbb{R}^+}(r) \\ f(\cdot, \theta) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} + \left(\frac{m \cos \theta}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{m^2 \sin^2 \theta}{2\sigma^2}} F\left(\frac{m \cos \theta}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

La loi de  $R$  est appelée loi de Rice.